- СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ
- SUPERCOMPUTER SIMULATIONS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE
- САРОВ-24.05.2021

Универсальные вычислительные алгоритмы – основа создания новых быстродействующих вычислительных систем

В.Б.Бетелин, В.А.Галкин

Федеральный научный центр НИИ системных исследований РАН, Москва

Сургутский филиал Федерального научного центра НИИ системных исследований РАН, Сургут

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП) по теме № 0065-2019-0007 «36.20 Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления»
(№ АААА-А19-119011590093-3).

- Разработка универсальных вычислительно однородных алгоритмов, адаптированных для целочисленных операций
- Цель:
- Тестирование работоспособности и быстродействия алгоритмов в целочисленной среде
- Создание нового поколения вычислительных систем

- Анализ уязвимостей в атомно–энергетическом комплексе, на предприятиях ТЭК нефтегазового комплекса, реакторах АПЛ и т.д., указывает на наиболее чувствительную и критическую часть этих систем – насосное оборудование. Поэтому огромное значение имеет библиотека точных нестационарных решений уравнений гидродинамики в условиях сложной геометрии.
- **Одним из важнейших вопросов построения симуляторов ЯЭУ является получение точной динамики несжимаемой жидкости в пористой среде. Более того, эта библиотека может служить основой малоразмерных кусочных аппроксимаций течений аналогично сплайнам, позволяя существенно снизить вычислительную нагрузку за счет использования грубых сеток с прецизионными решениями в межсеточном пространстве.**

Одним из важнейших вопросов построения симуляторов ЯЭУ является получение точной динамики несжимаемой жидкости в пористой среде

(Этот класс задач включает в себя также моделирование течения жидкого теплоносителя в системах ЯЭУ при образовании шлаков в системах охлаждения аналогично процессу образования тромбов в сердечно-сосудистой системе, либо движению нефти в матрице нефтеносной залежи во многофазной среде и т.п.)

Традиционные подходы к решению таких задач опираются на сеточные, проекционные методы, которые весьма **затратны** с точки зрения их реализации на вычислительной технике. В конечном счете, гонку в этой области деятельности определяют размерность вычислительных сеток, что неумолимо диктует гонку в области суперкомпьютерных технологий. При этом возможность верификации проектных расчетов крайне ограничена и вызывает существенные сомнения в их применимости в широком диапазоне параметров течения.

Специфика задач

- Значительное количество существенных физических факторов:

гидродинамика, трение, теплоперенос, фазовые переходы, электрические и магнитные явления, химические реакции

- Переменная во времени, сложная геометрия расчетной области,

зависящая от физических процессов

Проблемы

- Неявное изменение вычислительных алгоритмов при обмене данными между процессорами
- Большие массивы данных при использовании традиционных сеточных методов аппроксимации задач и не контролируемое накопление ошибок
- «Узость» множества тестовых примеров, используемых для обоснования применимости приближенных методов, реализуемых на «больших задачах»

Необходимость создания системы верификации вычислительных методов и новых вычислительных технологий для прикладных задач

- ***ПРИМЕР:* Сложность технологии «Цифровые недра» сопоставима с задачами атомного проекта;**
- ***Нет ясной перспективы у простого наращивания производительности вычислительных систем без анализа моделей и методов для классов решаемых задач;***

Возможные пути решения задач

- Создание сеточно-аналитической вычислительной технологии (сочетание грубых сеток с локально-аналитическими решениями);
- Сочетание разреженных сеток с кинетическими методами решения;
- Анализ математических моделей.
- Создание 3-D библиотеки аналитических тестов для верификации вычислительных методов и комплексов программ в задачах вычислительной гидродинамики и физической кинетики

Течение жидкости в пористой среде

- Исследования течения жидкостей в пористых твердых матрицах играют важную роль в задачах добычи нефти и газа, неоднородного катализа, управления водными ресурсами, в производстве стиральных порошков и т. д.

Динамика на сложных многообразиях пористой среды

Математически эта проблема напрямую связана с поведением решений для систем законов сохранения квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_\beta(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j^{(\beta)}}{\partial x_j} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \beta \in C. \qquad (1)$$

Здесь заданные нелинейные функции $F_j^{(\beta)}$ определяют локальную связность в среде. Анализ глобальной геометрии в «пористой среде» напрямую связан со структурой особенностей решений уравнения (1). Основное описание приведенного выше основано на так называемой теории функциональных решений в алгебраически сопряженном пространстве с оснащенной топологией А.Н.Тихонова

Рассматривается течение несжимаемой жидкости в открытой пространственной области $\{x\} \in \in D(t) \subset \mathbb{R}_n$ с границей $\partial D(t)$, где t – время. Условие несжимаемости жидкости предполагает неизменность объема $D(t)$. Предполагается, что в указанной области жидкость имеет постоянную плотность $\rho > 0$, а ее динамика задается полем скоростей $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x},t)\}_1^n$ и давлением $p(\mathbf{x},t)$, которые подчиняются уравнениям Навье–Стокса и закону сохранения массы в эйлеровых координатах:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u_i) + \rho^{-1} F_i, \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in D(t),$$

где $\varepsilon = \eta\rho^{-1}$ – кинематическая вязкость жидкости, η – динамическая вязкость, $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \{F_i\}_1^n$ – плотность объемных сил. Ниже рассматривается случай, когда $\varepsilon = \mathrm{const} \geq 0$, $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) \equiv 0$, $\rho \equiv 1$.

Одним из важнейших вопросов построения кернового симулятора является получение точной динамики несжимаемой жидкости в пористой среде. Рассмотрим простейшую модель пористой среды, состоящую из дискретного набора точек – узлов сетки $\partial D(t) \subset \mathbb{R}_n$. В этом случае область течения $D(t) \equiv \mathbb{R}_n \backslash \partial D(t)$. На узлах сетки, являющихся границей области течения, потребуем выполнение условия прилипания

$$\mathbf{u}|_{\partial D(t)} = 0. \tag{2}$$

Для построения точных решений системы (1) с условиями прилипания (2) воспользуемся нетривиальными точными решениями $(\mathbf{V}, \Phi)$ задачи

$$[\mathbf{V}, \mathrm{rot}\,\mathbf{V}] = \nabla\Phi, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

где отысканию подлежат гладкий потенциал Φ и векторное поле $\mathbf{V}$ на $D(t)$.

Модель пористой среды, состоящей из узлов плоской сетки

Рассмотрим модель пористой среды, состоящей из узлов плоской сетки в двумерном пространстве

$$\partial D(t)=\pi\times\mathbb{Z}_2+0.5\times(\pi,\pi)$$

Точное решение: $$\begin{cases}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\exp(-\varepsilon\lambda t)\begin{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\lambda}x_2\right)\\ \sin\left(\sqrt{\lambda}x_1\right)\end{pmatrix}\\ p(\mathbf{x},t)=\exp(-2\varepsilon\lambda t)\cos\left(\sqrt{\lambda}x_2\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}x_1\right)\end{cases}$$

$\lambda>0$.

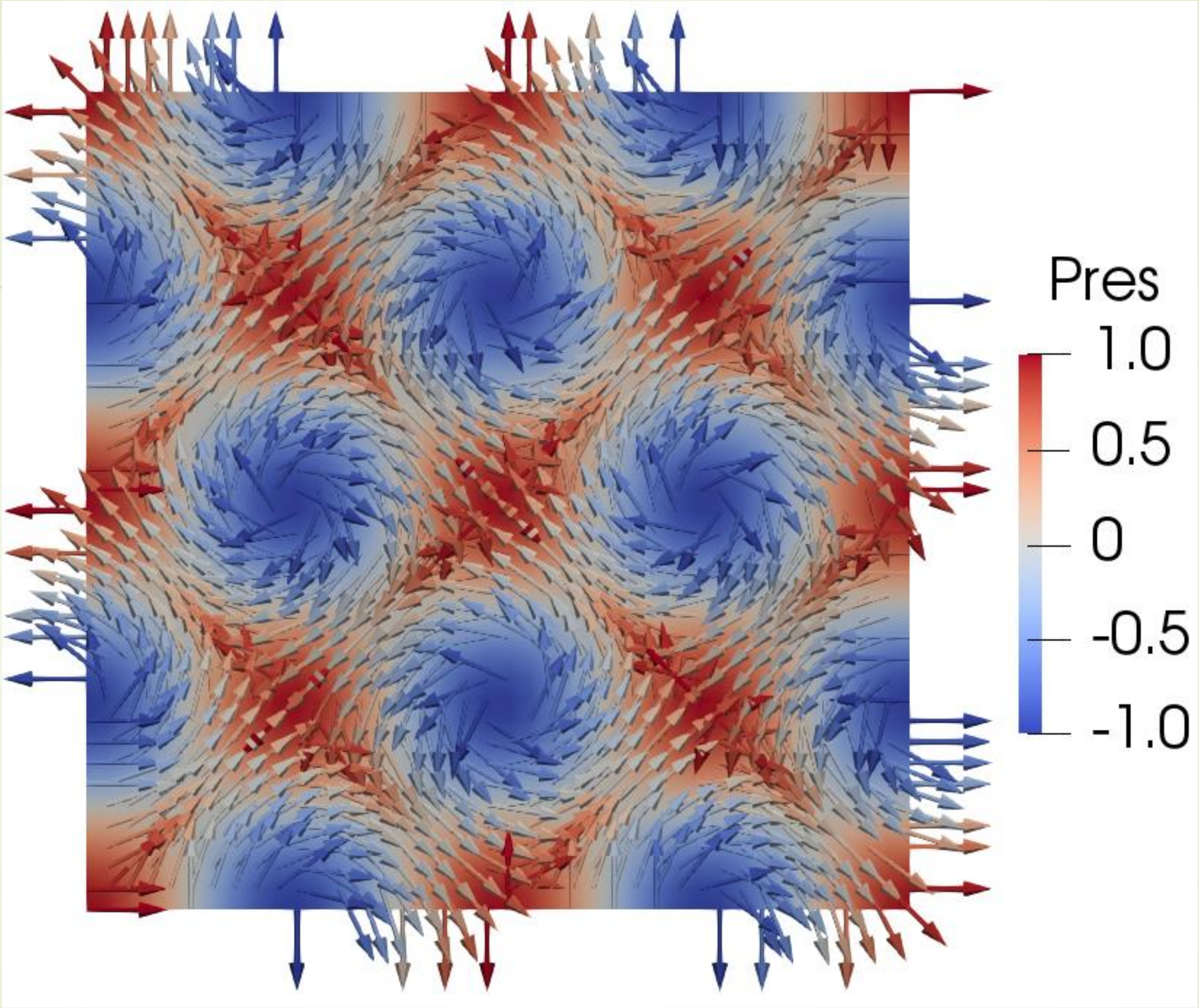


Рис. Структура течения

Изображено решение задачи в квадратной области при $\lambda=4$, в центре рисунка находится точка O(0;0), $t \geq 0$.

Стрелки соответствуют направлению поля скорости.

Течение структурировалось на квадраты, внутри которых вращаются вихри с центрами, расположенными в узлах сетки, в которых скорость течения обращается в нуль.

На границах квадратов, расположенных в под углами и центрами на сетке, жидкость скользит по касательной.

Аналогичное структурирование течения проводящей жидкости наблюдалось при описании точного трехмерного решения системы уравнений магнитной гидродинамики с условием скольжения на границе параллелепипеда

Трёхмерное течение

Точное решение:

$$u(x,t)=\begin{pmatrix}\sin(x_2)-\cos(x_3)\\ \sin(x_3)-\cos(x_1)\\ \sin(x_1)-\cos(x_2)\end{pmatrix}\exp(-\varepsilon t), \qquad p(x,t)=-\frac{1}{2}(u,u).$$

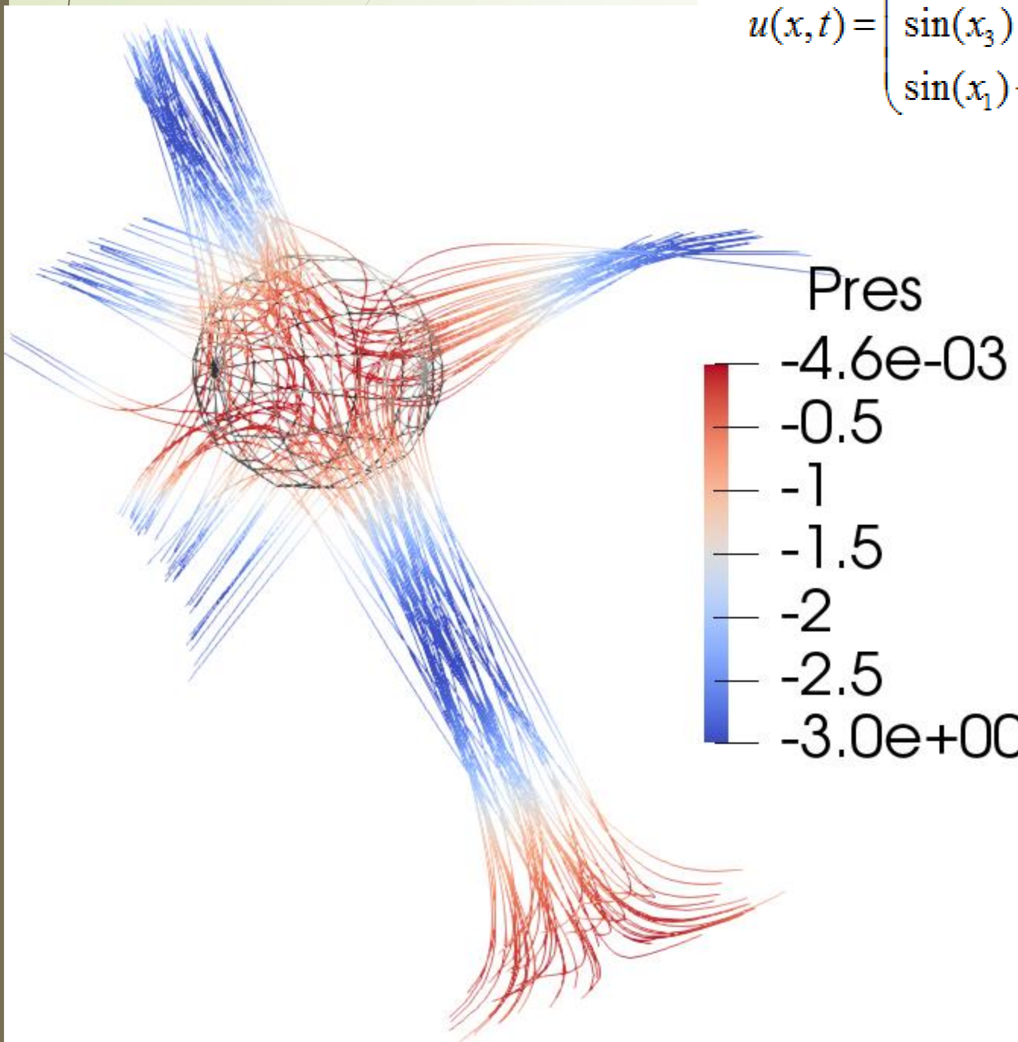
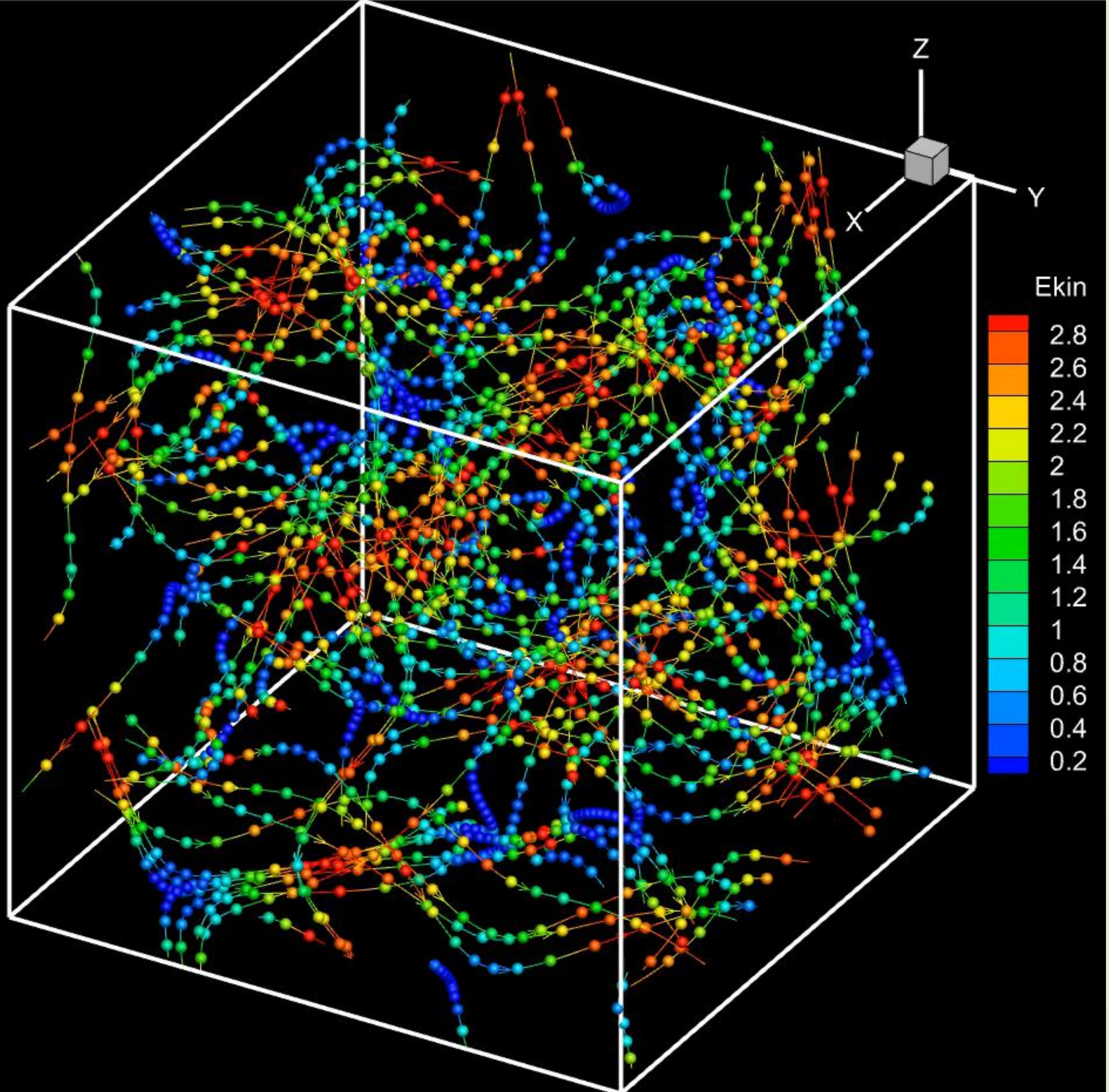


Рис. иллюстрирует линии тока в точке прилипания, где поле давления равно нулю. Линии тока, проходящие через сферу радиуса 1 с центром в точке $x_1=x_2=x_3=\pi/4$



Анимация линий тока на момент времени t=0

Пример визуализации точного решения уравнений трехмерной гидродинамики в пористой среде, состоящей из нитевидной сетки вертикальных препятствий

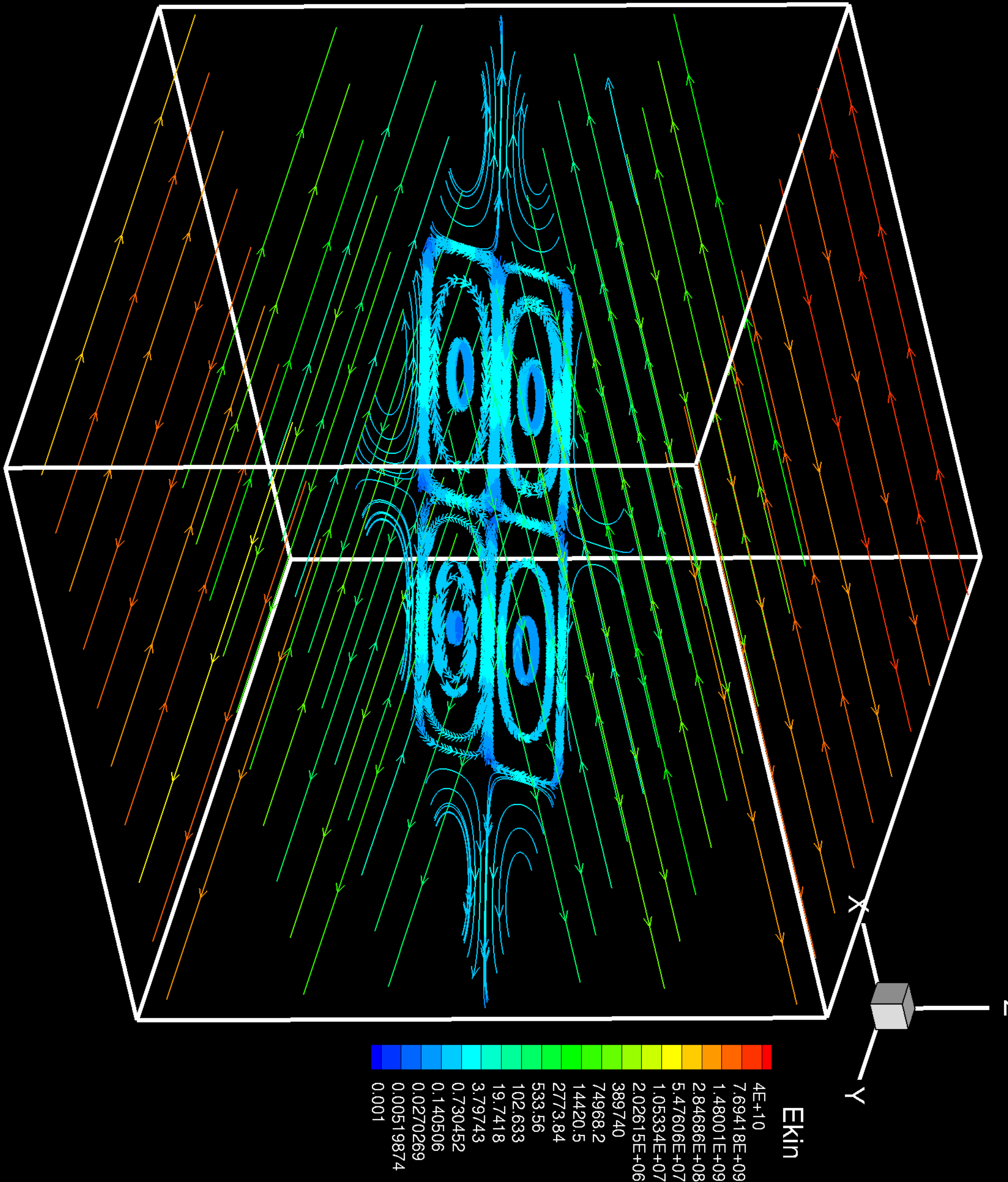
Препятствия расположены с периодом $\lambda>0$ ортогонально к плоскости $x_3=0$. Предполагается, что на препятствиях выполнены условия прилипания. Семейство точных решений этих уравнений, включая поля температуры $T(x,t)$ и примеси $n(x,t)$, определяемых постоянными параметрами α, β, χ, λ, μ, ν имеет следующий вид

$$V=\begin{pmatrix}\exp(\mu x_3)\sin\lambda x_2\\ \exp(-\mu x_3)\sin\lambda x_1\\ 0\end{pmatrix}\exp\left(\left(\mu^2-\lambda^2\right)\nu t\right);$$

$$p=\exp\left(2\nu\left(\mu^2-\lambda^2\right)t\right)\cos(\lambda x_1)\cos(\lambda x_2);$$

$$n=\exp\left(\left(\mu^2-\lambda^2\right)\chi t\right)\left(\exp(-\mu x_3)\cos(\lambda x_1)-\exp(\mu x_3)\cos(\lambda x_2)\right)+$$

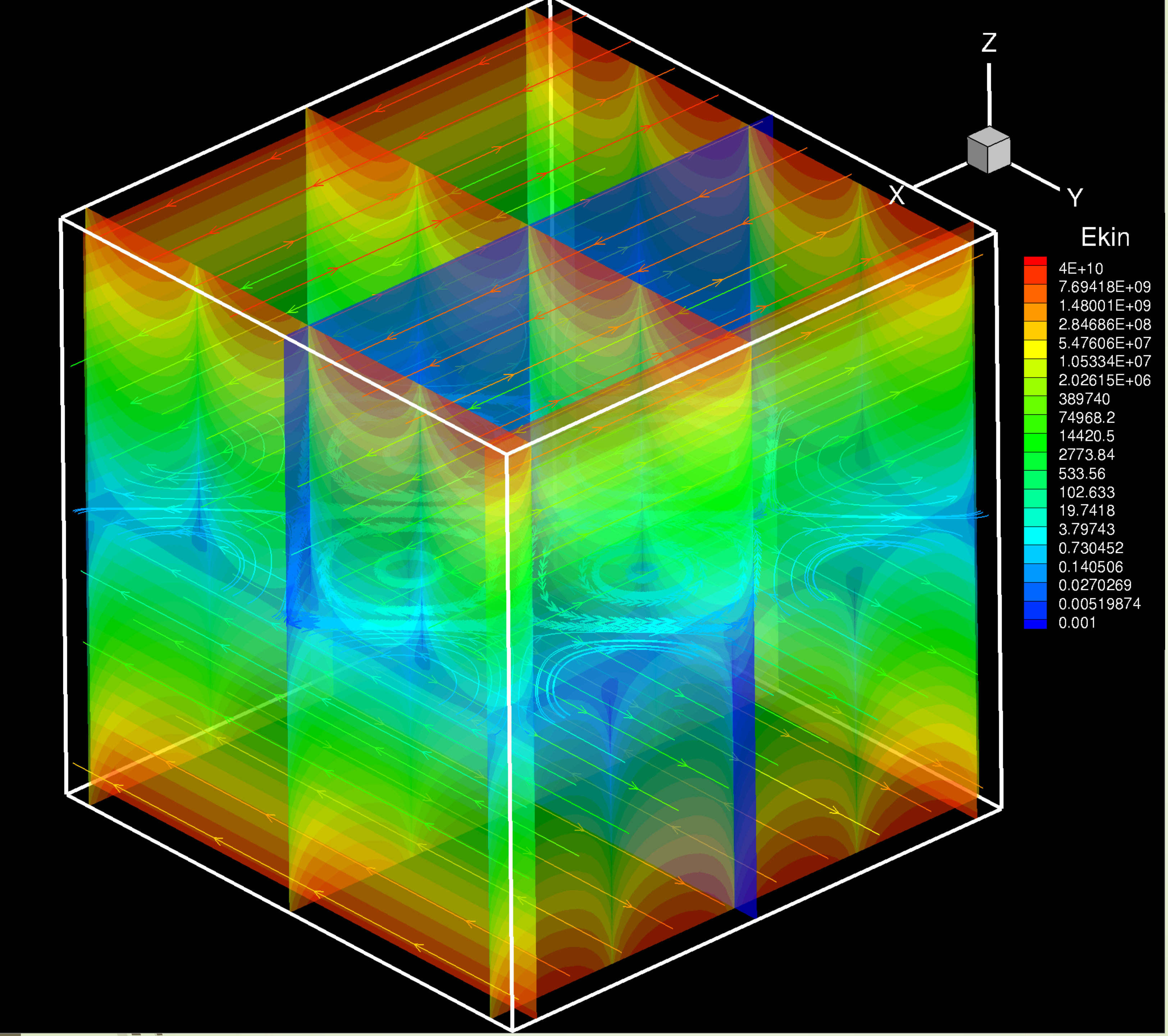
$$+\exp\left(\mu^2\chi t\right)\left[\alpha\exp(-\mu x_3)+\beta\exp(-\mu x_3)\right].$$



Визуализации точного решения (линии тока)

$(0 < \lambda < \mu)$, time = 0; $\lambda = 1$; $\mu = 2$

$\alpha = 1$; $\beta = 1$; $\nu = 1$; $\chi = 1$.

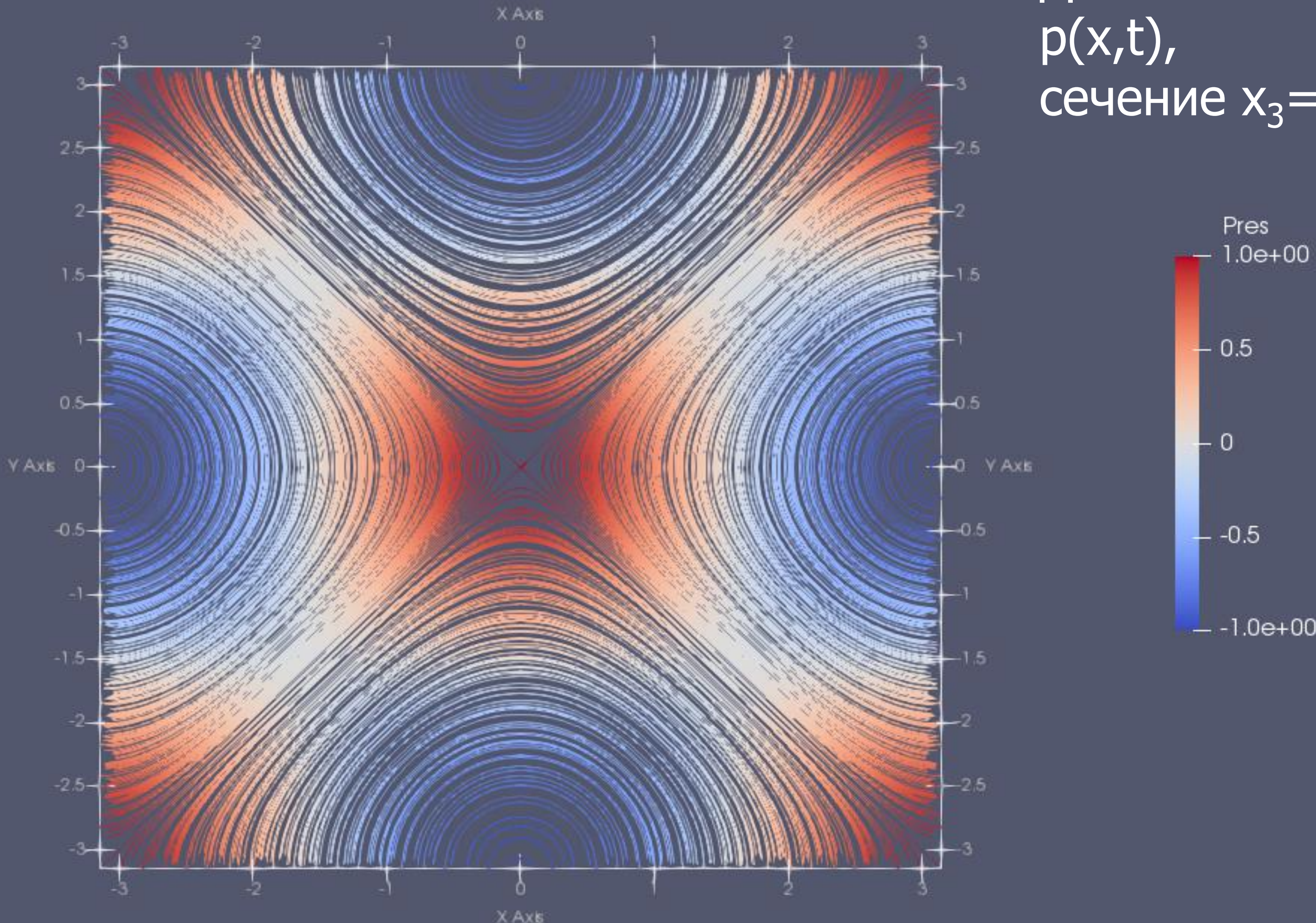


Визуализации точного решения (линии тока)

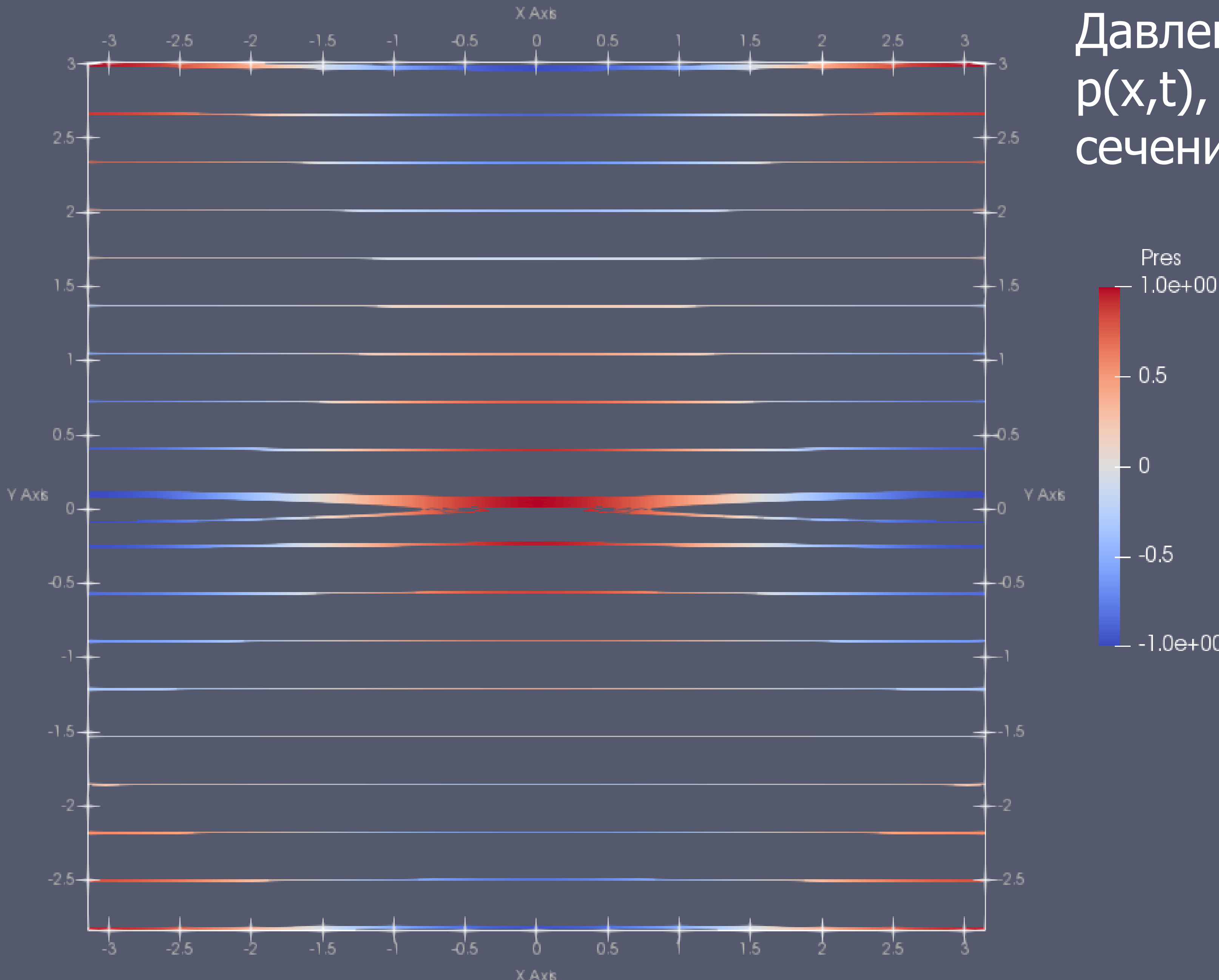
$(0 < \lambda < \mu)$, time = 0; $\lambda = 1$; $\mu = 2$

$\alpha = 1$; $\beta = 1$; $\nu = 1$; $\chi = 1$.

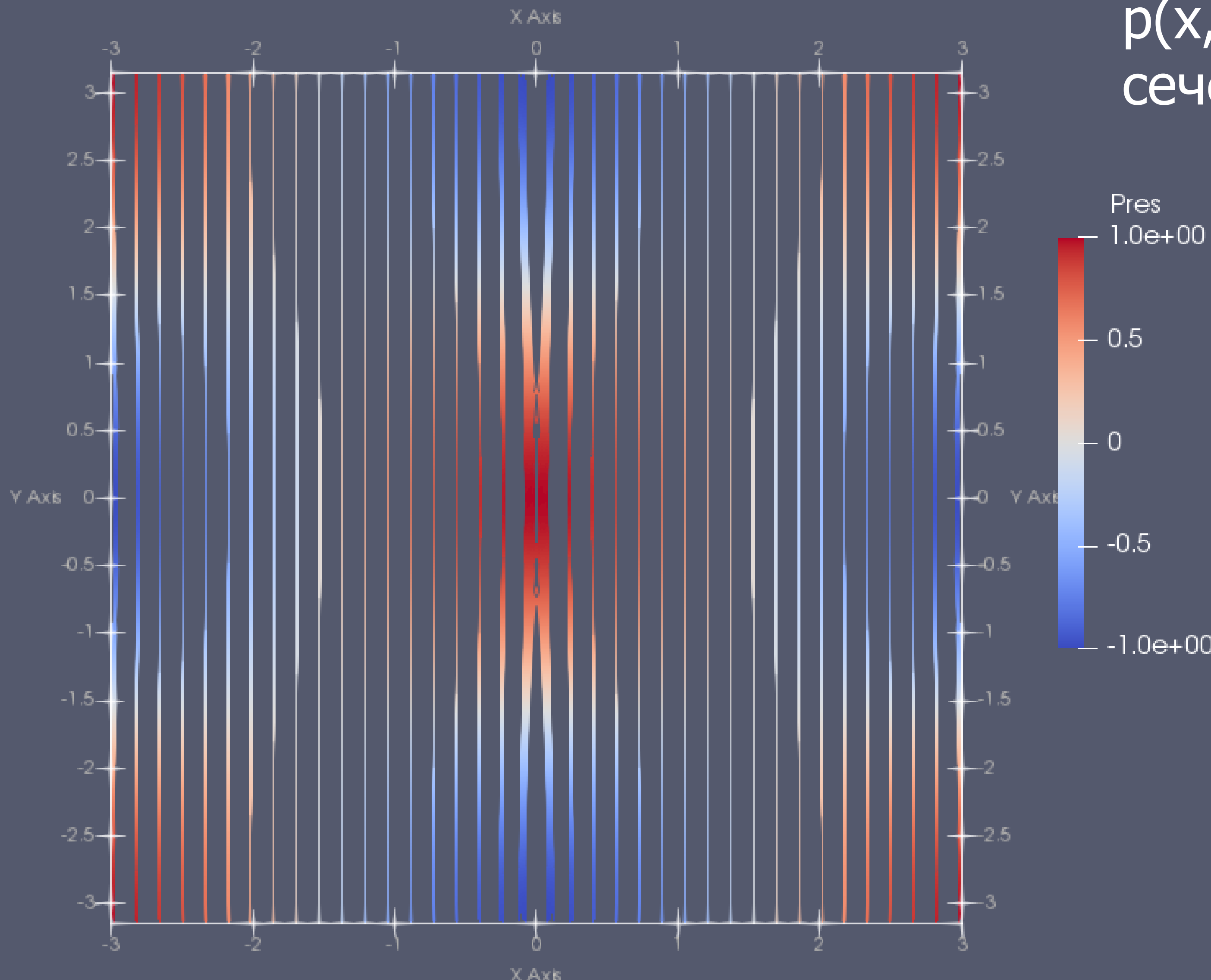
Давление $p(x,t)$, сечение $x_3=0$



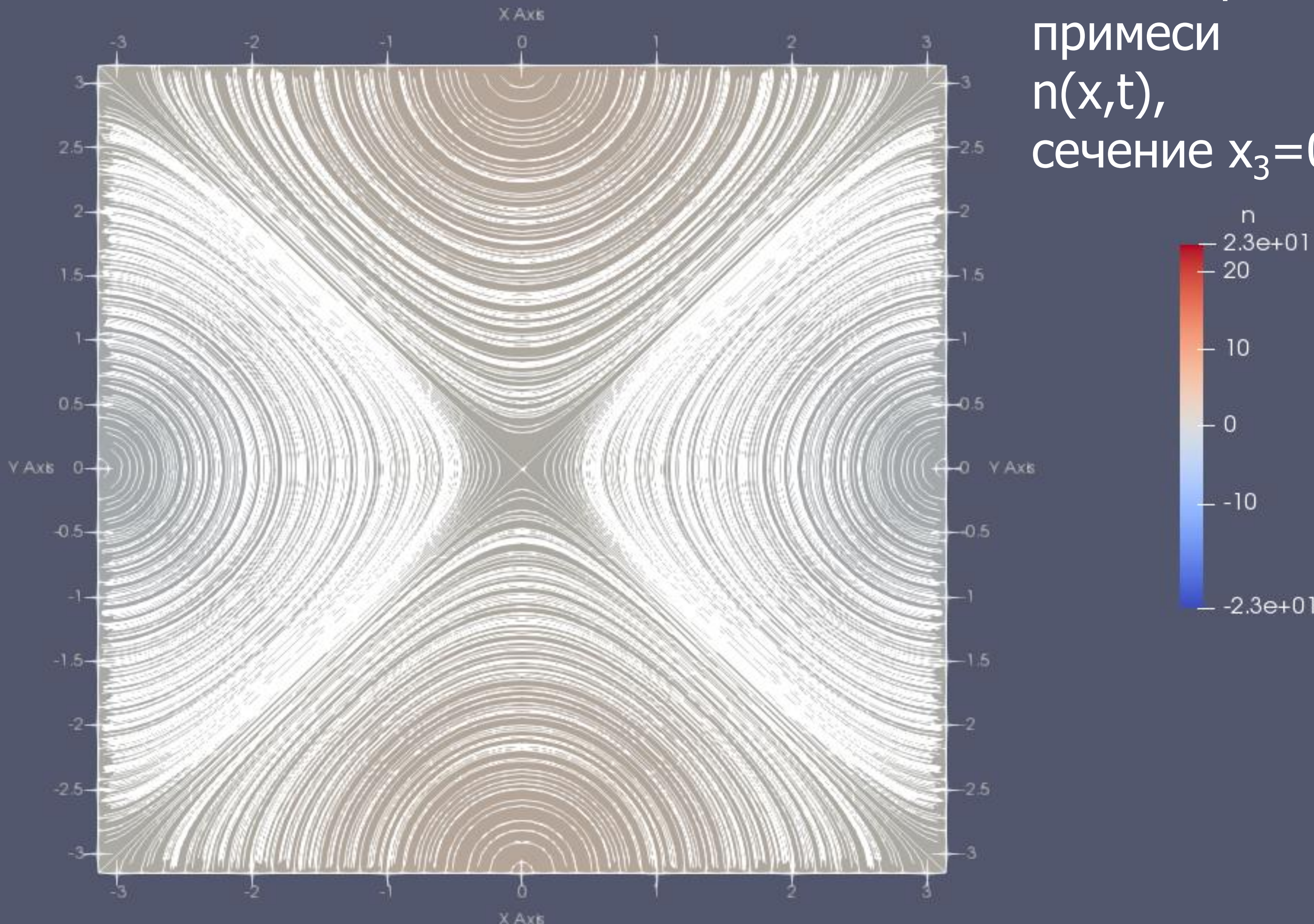
Давление $p(x,t)$, сечение $x_3>0$

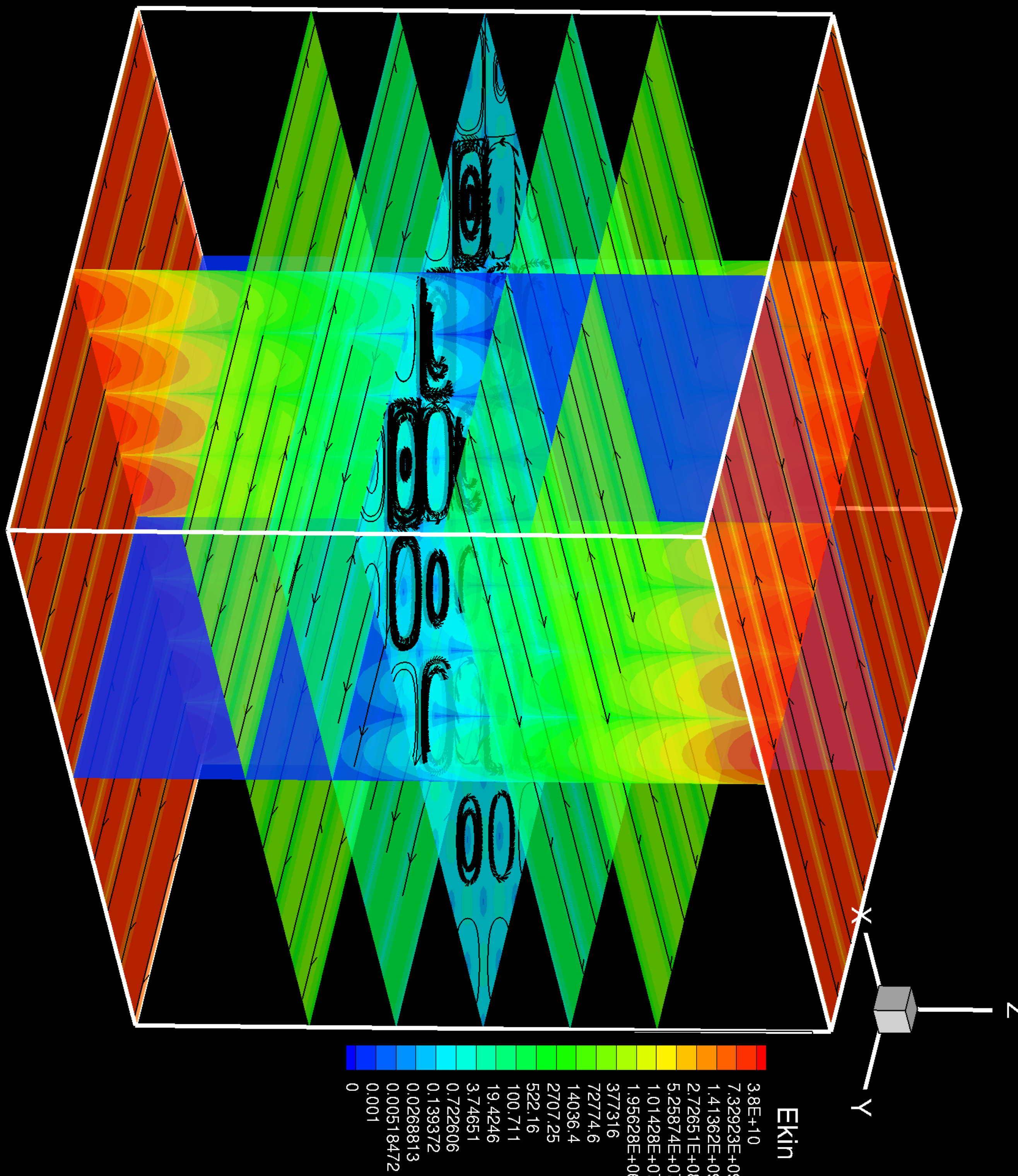


Давление $p(x,t)$, сечение $x_3<0$



Концентрация примеси $n(x,t)$, сечение $x_3=0$





Визуализация точного решения (линии тока)

(λ = μ); time = 0; λ = 2; μ=2

α = 1; β = 1; ν = 1; χ = 1.

Система уравнений магнитной гидродинамики

Для практических задач существенно построение точных решений для задач, основанных на системе МГД (магнитной гидродинамики) с учетом динамики примесей в потоке (очевидно, что при отсутствии магнитного поля эта система переходит в систему уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости). При этом важно иметь примеры точных решений для течений в пористых структурах.

Система уравнений МГД :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \dfrac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B} + \alpha\,\Delta\mathbf{u}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{u}\times\mathbf{B}] = \beta\,\Delta\mathbf{B}, \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)n = \sigma\,\Delta n. \end{cases}$$

$\mathbf{u}$ – *гидродинамическая скорость течения*

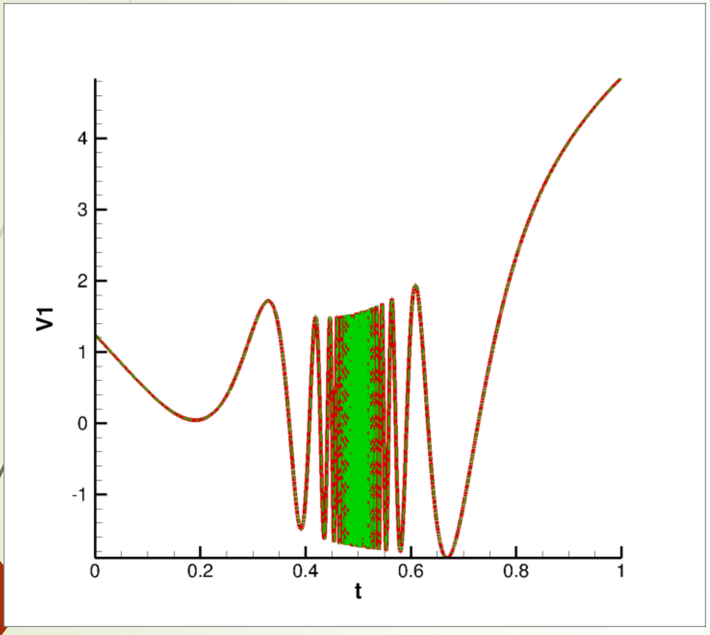
$\mathbf{B}$ – *магнитная индукция*

p – *давление*

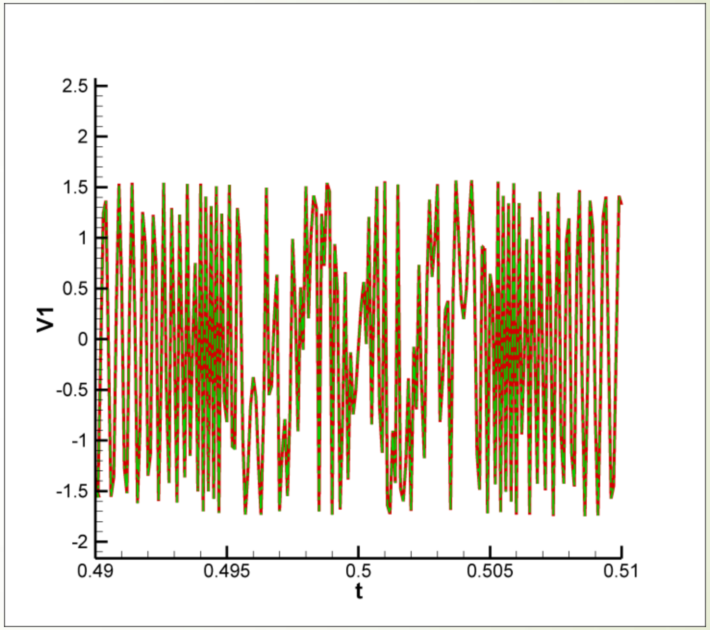
n – *концентрация примеси*

Тест 2

Результаты



а) $t \in [0; 1]$



б) $t \in [0.49; 0.51]$

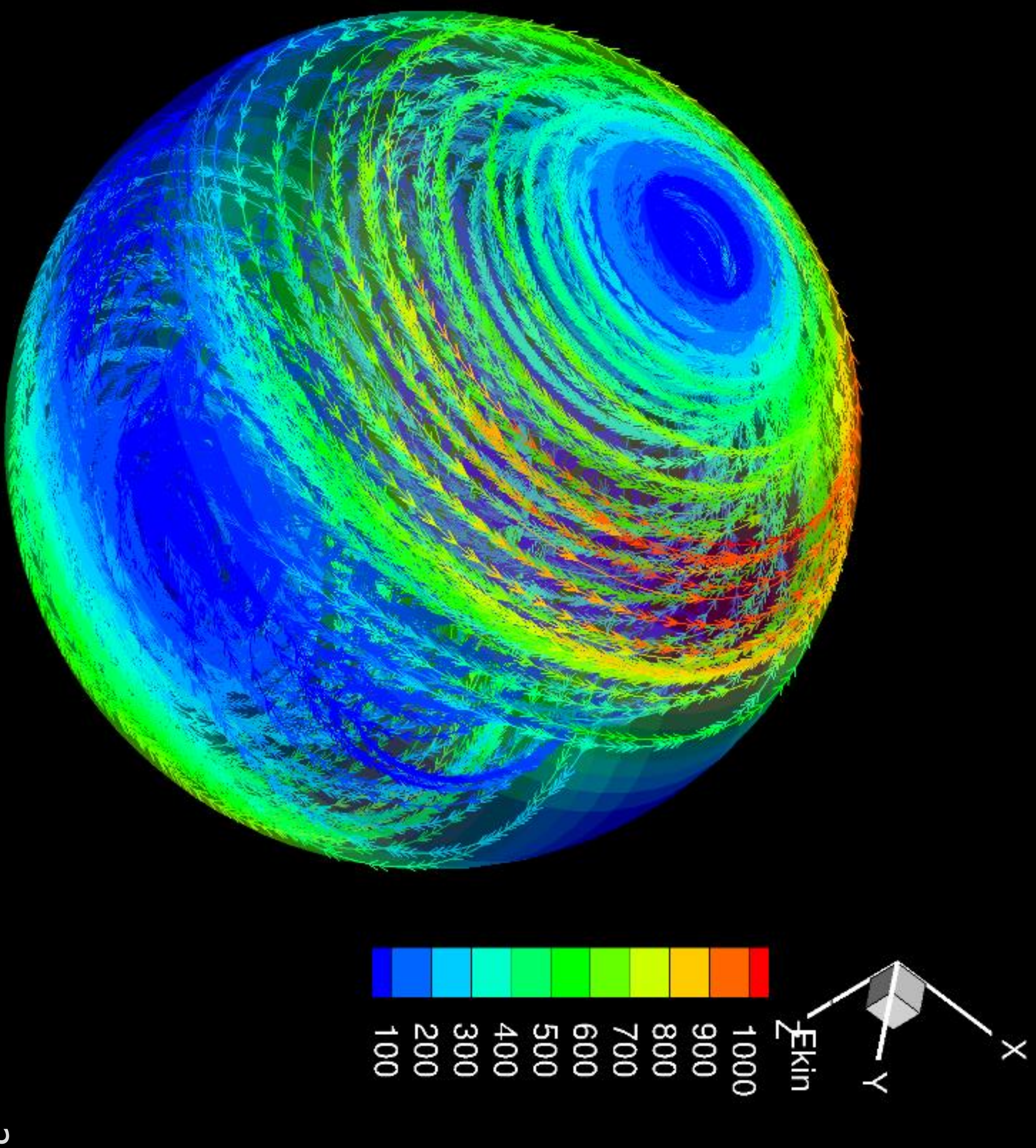
Рис. 6. Зависимость первой компоненты скорости от времени. **Аналитическое решение V – красные сплошные линии**. **Численное решение U - зеленые штрих-пунктирные линии**

Тест 1 (МГД)

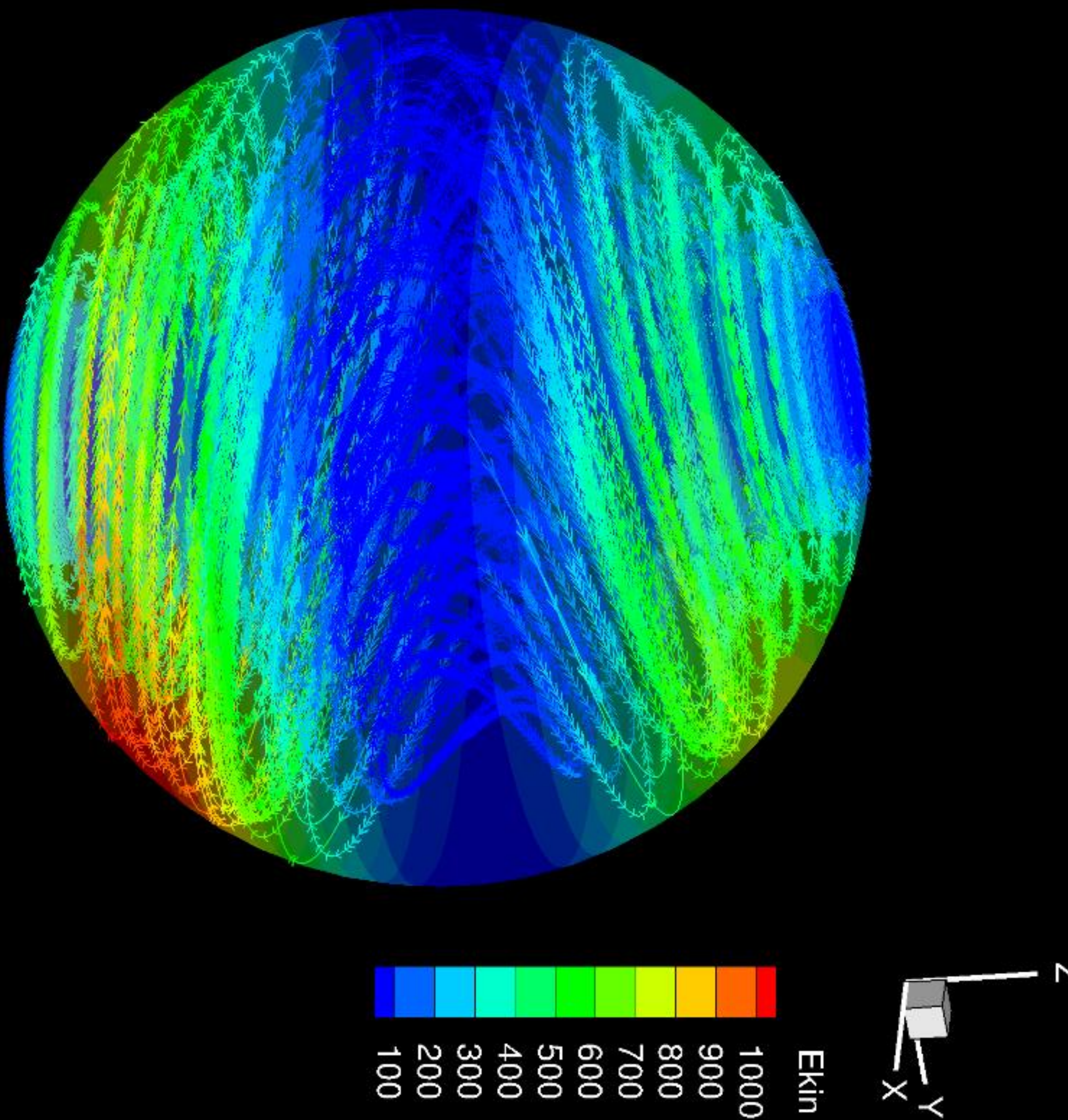
Аналитическое решение

$$
\begin{aligned}
P = {} & -\frac{1}{2}V^2 + \left(x_1 + x_3 - e^t\left(\sin 3t + (t-0.5)^2 \sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)\right)\cos(x_2 - e^t \sin 2t)\Bigg[(t-0.5)(t+1.5)\sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} \\
& - \operatorname{sgn}(t-0.5)\left(\frac{t-0.5}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)^2 \cos\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\Bigg] \\
& + (\sin 3t + 3\cos 3t)\sin(x_2 - e^t \sin 2t)\left(x_1 + x_3 - e^t\left(\sin 3t + (t-0.5)^2 \sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)\right) \\
& + x_1\Bigg\{-e^t \sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\left(t^2 + 3t + \frac{1}{4}\right) + 2e^t \operatorname{sgn}(t-0.5)\frac{1}{(|t-0.5|+\varepsilon)^2}\cos\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\left(t^2 - \frac{1}{4} + \varepsilon\frac{t-0.5}{|t-0.5|+\varepsilon}\right) \\
& + e^t\left(\frac{t-0.5}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)^2\left(2\delta(t-0.5)\cos\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} + \sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\frac{1}{(|t-0.5|+\varepsilon)^2}\right)\Bigg\} \\
& + \sin\left(x_1 - e^t(t-0.5)^2 \sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)\Bigg[(t-0.5)(t+1.5)\sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} - \operatorname{sgn}(t-0.5)\left(\frac{t-0.5}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)^2 \cos\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} \\
& + (\sin 3t + 3\cos 3t)\big(x_2 + x_3 - e^t(\sin 2t + \sin 3t)\big)\Bigg] \\
& + \cos\left(x_1 - e^t(t-0.5)^2 \sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)\Bigg[(t-0.5)(t+1.5)\sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} - \operatorname{sgn}(t-0.5)\left(\frac{t-0.5}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)^2 \cos\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} \\
& - (\sin 2t + 2\cos 2t)\big(x_2 + x_3 - e^t(\sin 2t + \sin 3t)\big)\Bigg] - x_2 e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t) \\
& + (\sin 2t + 2\cos 2t)\big(\cos(x_2 - e^t \sin 2t) - \sin(x_2 - e^t \sin 2t)\big) - x_3 e^t(6\cos 3t - 8\sin 3t) \\
& + \big(\sin(x_3 - e^t \sin 3t) + \cos(x_3 - e^t \sin 3t)\big)\Bigg((t-0.5)(t+1.5)\sin\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon} \\
& - \operatorname{sgn}(t-0.5)\left(\frac{t-0.5}{|t-0.5|+\varepsilon}\right)^2 \cos\frac{1}{|t-0.5|+\varepsilon}\Bigg) - (\sin 2t + 2\cos 2t)\big(\sin(x_3 - e^t \sin 3t) - \cos(x_3 - e^t \sin 3t)\big)
\end{aligned}
$$

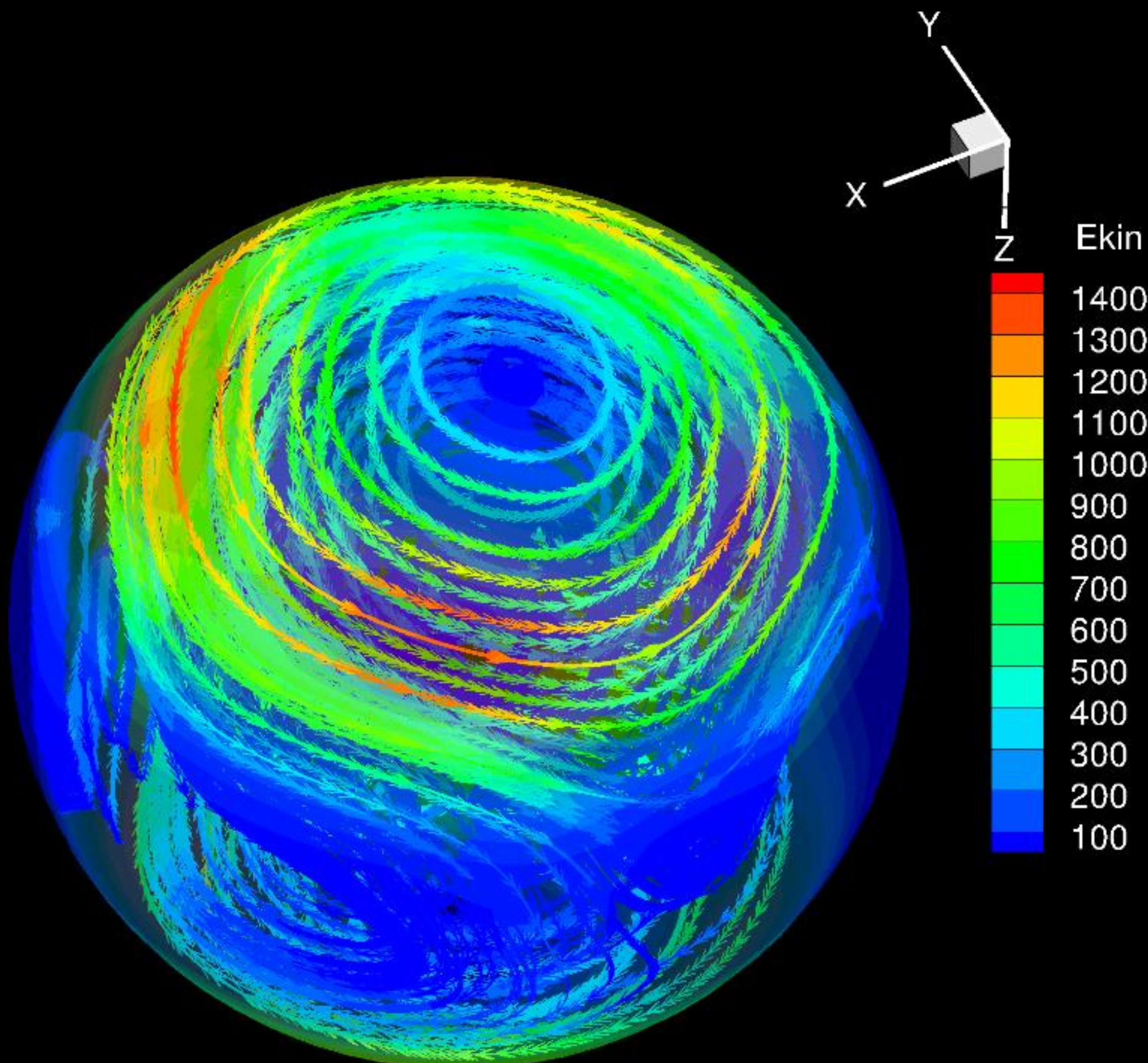
Визуализация 3-D точного решения системы МГД в различных ракурсах на шаре (гидродинамическое поле и магнитное поле являются касательными на поверхности сферы – «Глаза Юпитера»)



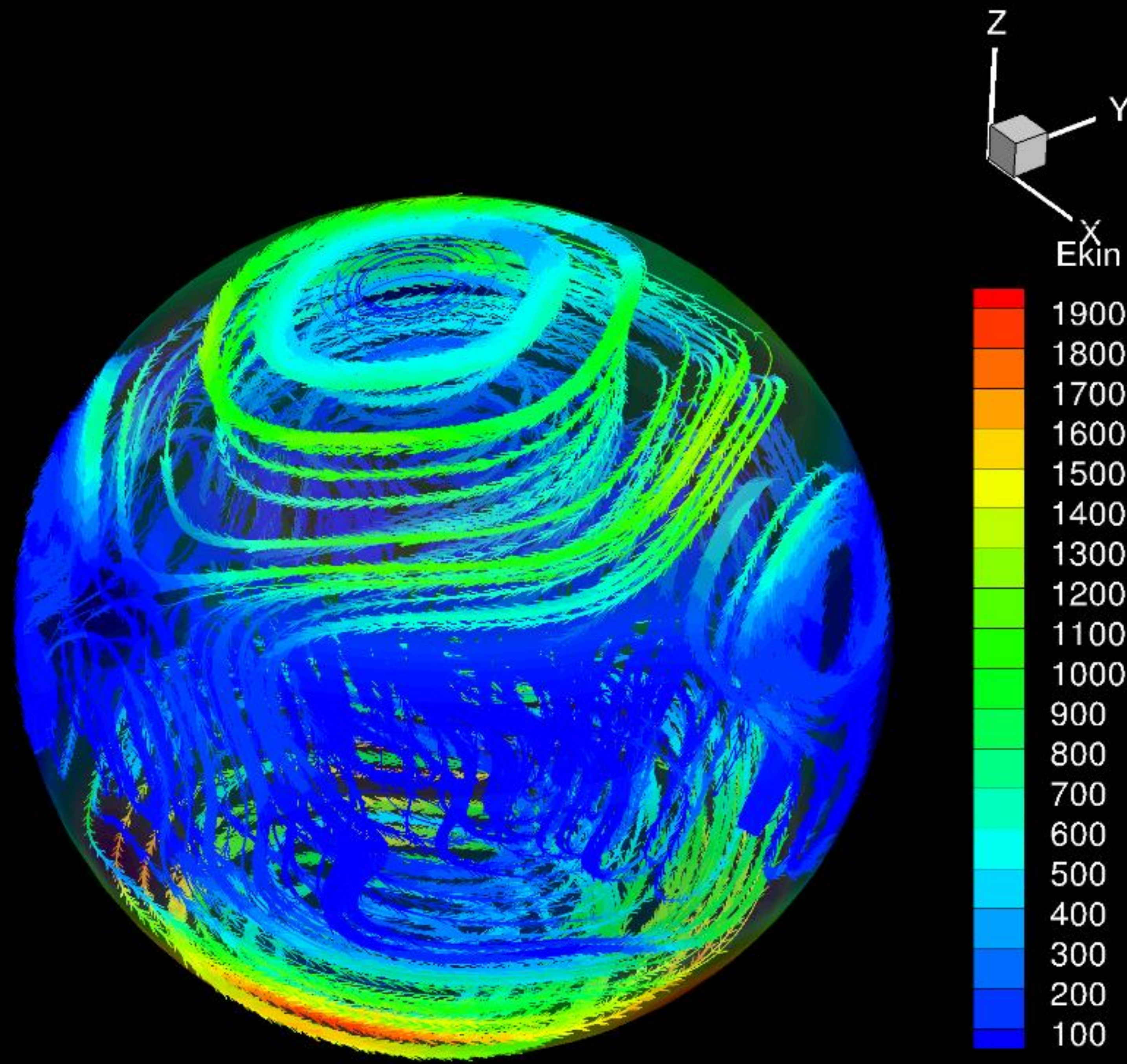
Визуализация 3-D точного решения системы МГД в различных ракурсах на шаре (гидродинамическое поле и магнитное поле являются касательными на поверхности сферы – «Глаза Юпитера»)



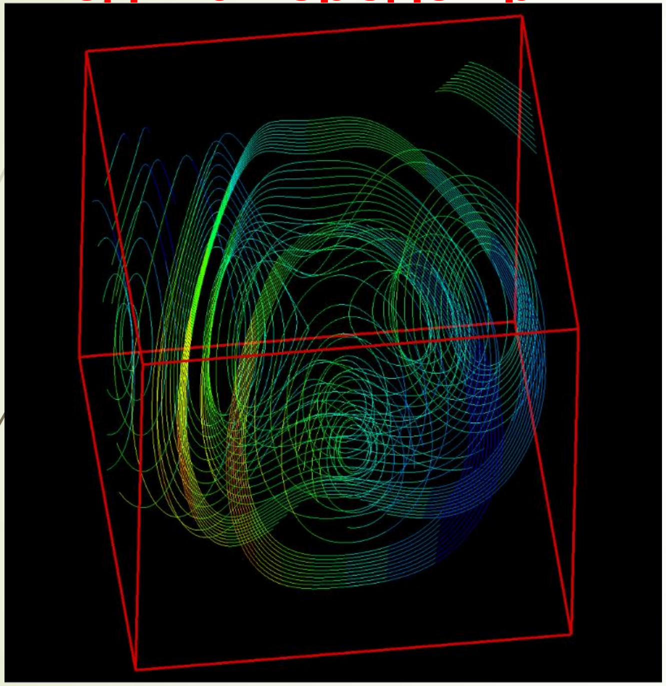
Визуализация 3-D точного решения системы МГД в различных ракурсах на шаре (гидродинамическое поле и магнитное поле являются касательными на поверхности сферы – «Глаза Юпитера»)



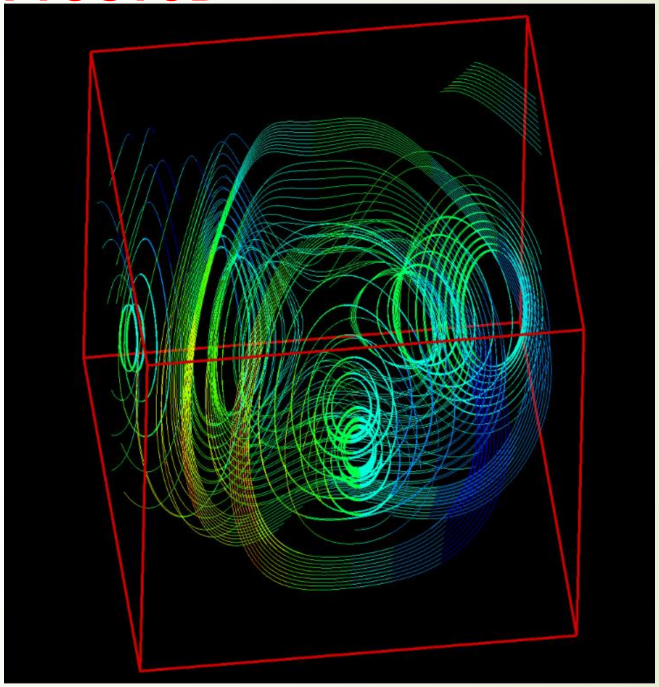
Визуализация 3-D точного решения системы МГД в различных ракурсах на шаре (гидродинамическое поле и магнитное поле являются касательными на поверхности сферы – «Глаза Юпитера»)



Создание отечественной библиотеки верификации вычислительных моделей в единой среде принятых тестов



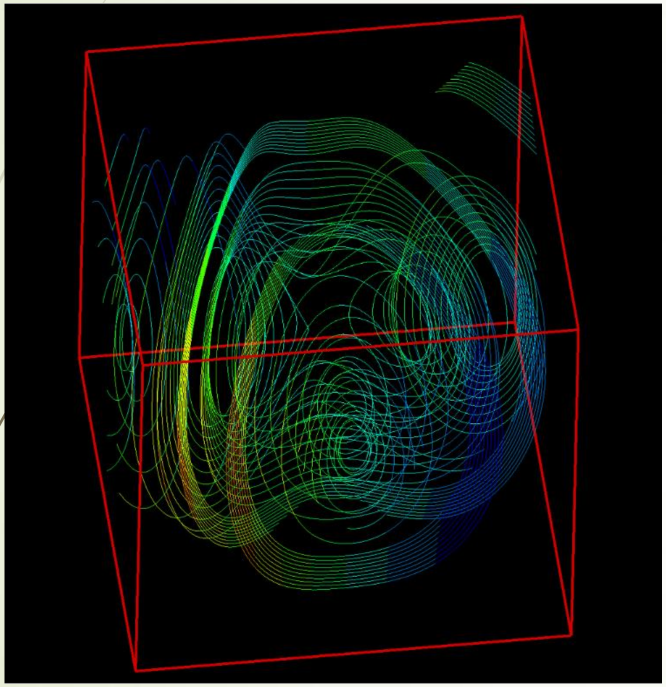
а) **Аналитическое решение**



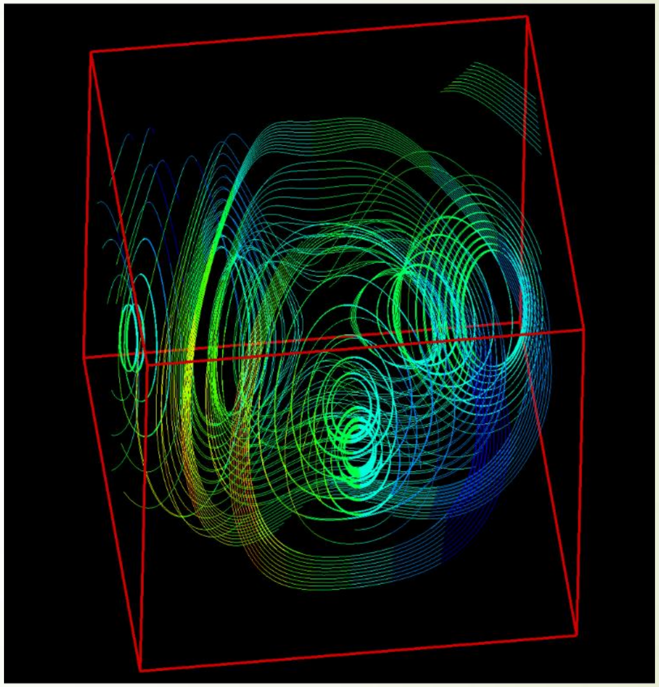
б) **Численное решение**

Рис. Силовые линии индукции магнитного поля

МГД-управление-3D течением



а) **Аналитическое решение**



б) **Численное решение**

Необходимость создания отечественных вычислительно- однородных быстродействующих систем на простой алгоритмической и элементной базе

- 1) Разработка вычислительных алгоритмов, одинаковых для широкого класса задач.
- 2) Их реализация на отечественных вычислительных системах, защищенных от программных атак.
- 3) Обеспечение неограниченного наращивания однородной вычислительной среды.

Разработка и обоснование несеточных методов

- **Кинетический метод решения дифференциальных уравнений.**

Классы решаемых ОДУ

На кубе $\Omega_n = \prod_{k=1}^{n} [0,1] \subset \mathbb{R}_n$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = f(u,t), \quad t > 0, \quad u \in \Omega_n, \tag{1}$$

где правая часть $f = \{f_i\}_{i=1}^{n}$ такова, что во внутренних точках куба Ω_n функции f_i являются многочленами по переменным $u = \{u_k\}_{k=1}^{n}$

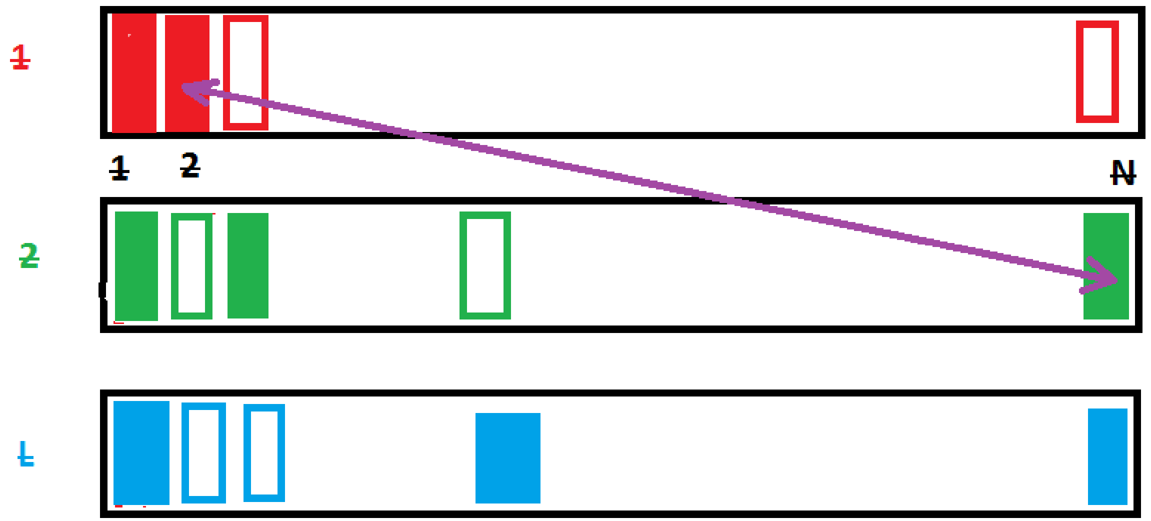
$$f_l(u,t) = \sum_{p \ge 0} \alpha^{(l)}_{p_1,p_2,\ldots p_n}(t) u_1^{p_1} u_2^{p_2} \ldots u_n^{p_n}, \tag{2}$$

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \quad p_l \in \mathbb{Z}^+, \quad u_k^0 \overset{\mathrm{def}}{\equiv} 1,$$

с измеримыми локально ограниченными коэффициентами $\alpha^{(l)}_{p_1,p_2,\ldots p_n}$ при значениях времени $t \ge 0$.

Кинетический процесс

- Сопоставим системе (1) кинетический процесс, основанный на взаимодействиях различных видов частиц, где количество видов совпадает с размерностью системы (1).



Правила взаимодействия

Если заданная величина $\alpha^{(l)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(t_j) > 0$, то для $\xi^{(l)}(t_j)$ допускается рождение одной частицы в ячейке D_l. Аналогично отрицательным значениям этой величины сопоставляется гибель одной частицы в D_l. Акты рождения и гибели для $\xi^{(l)}(t_j)$ разыгрываем заданием независимых случайных величин $\eta^{(l)}(t_j)$, принимающих значение 1 с условной вероятностью $\left|\alpha^{(l)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(t_j)\right| N\tau \le 1$, и значение 0 с дополнительной вероятностью. Для нулевых значений $\eta^{(l)}$ взаимодействие выбранных частиц исключается.

Подготовка целочисленных данных

Числа заполнения ячейки частицами вида L

$$N^{(l)}(t_j) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \delta_{1,m_i^{(l)}(t_j)}.$$

- (для «положительных» частиц)

$$u_N^{(l)}(t_j) \overset{def}{=} \frac{\left\langle N^{(l)}(t_j) \right\rangle}{N}$$

- Знакопеременные решения определяются заполнением частицами «+1» и «-1». N – общее число частиц - масштабируется для регулировки уровня «срезки» приближения

Теорема 1. *Пусть* $\alpha^{(l)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(t)$ *являются измеримыми локально ограниченными функциями при* $t \geq 0$. *Тогда средние концентрации* $u_N^{(l)}(t_j)$ *подчиняются разностному уравнению*

$$u_N^{(l)}(t_{j+1}) = u_N^{(l)}(t_j) + \tau f_l(u_N^{(\bullet)}(t_j), t_j) + \tau O(N^{-1}), \quad N \geq 1,$$

где оценка $O(N^{-1})$ *является равномерной относительно* t_j.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и существует* $\lim\limits_{N\to\infty} u_N^{(l)}(0)$. *Тогда при каждом* $t_j \geq 0$ *существует* $\lim\limits_{N\to\infty} u_N^{(l)}(t_j) = u_l^{(l)}(t_j)$, *подчиняющийся разностному уравнению*

$$u^{(l)}(t_{j+1}) = u^{(l)}(t_j) + \tau f_l\,(u^{(\bullet)}(t_j), t_j), \qquad (4)$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}(t)$ *являются измеримыми локально ограниченными функциями при* $t \geq 0$ *и существует* $\lim\limits_{N \to \infty} u_N^{(l)}(0) = u_l(0)$, *где* $\{u_l\}_{l=1}^{n}$ — *решение системы* (1). *Тогда для последовательности средних концентраций* (3) *справедливо соотношение*

$$\max_{0 \leq j \leq [T/\tau(N)]} \left| u_l(t_j) - u_N^{(l)}(t_j) \right| \to 0, \quad N \to \infty, \quad \forall l,$$

для каждого $T \geq 0$.

Пример расчета для многочленов 5-й степени (белый график - одна история L=2 N=10^3), T=6. Красный график- разностная схема Эйлера \tau=10^-5.

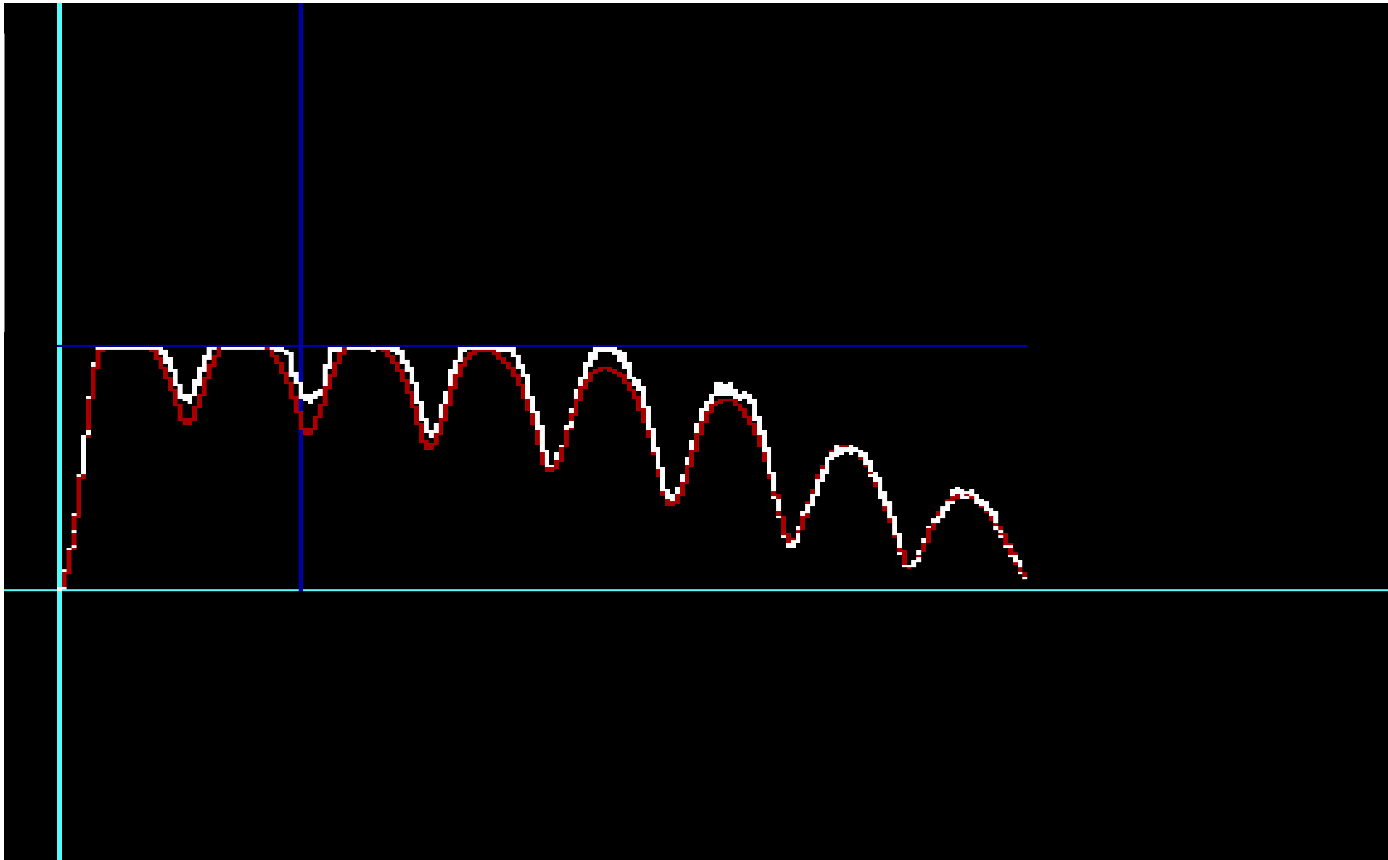
$$\frac{du}{dt} = 16 * \sin(2\pi t) + 1 - u - u^2 - 2u^3 - 5u^5 - 4u^4,$$

$$if \quad 0 \le u \le 1, \quad else \quad 0, \; or \;\; 1$$

$0 < t \le 4,$

if u >= 1 then u := 1;

if u <= 0 then u := 1;



Иерархический метод

- Описание динамики сложных систем предполагает наличие в ней статистически большого количества элементов. Моделирование таких систем основывается на использовании законов сохранения, которые формулируются либо на уровне динамики отдельных частиц, либо в терминах средних величин, задающих распределение элементов системы в пространстве состояний.

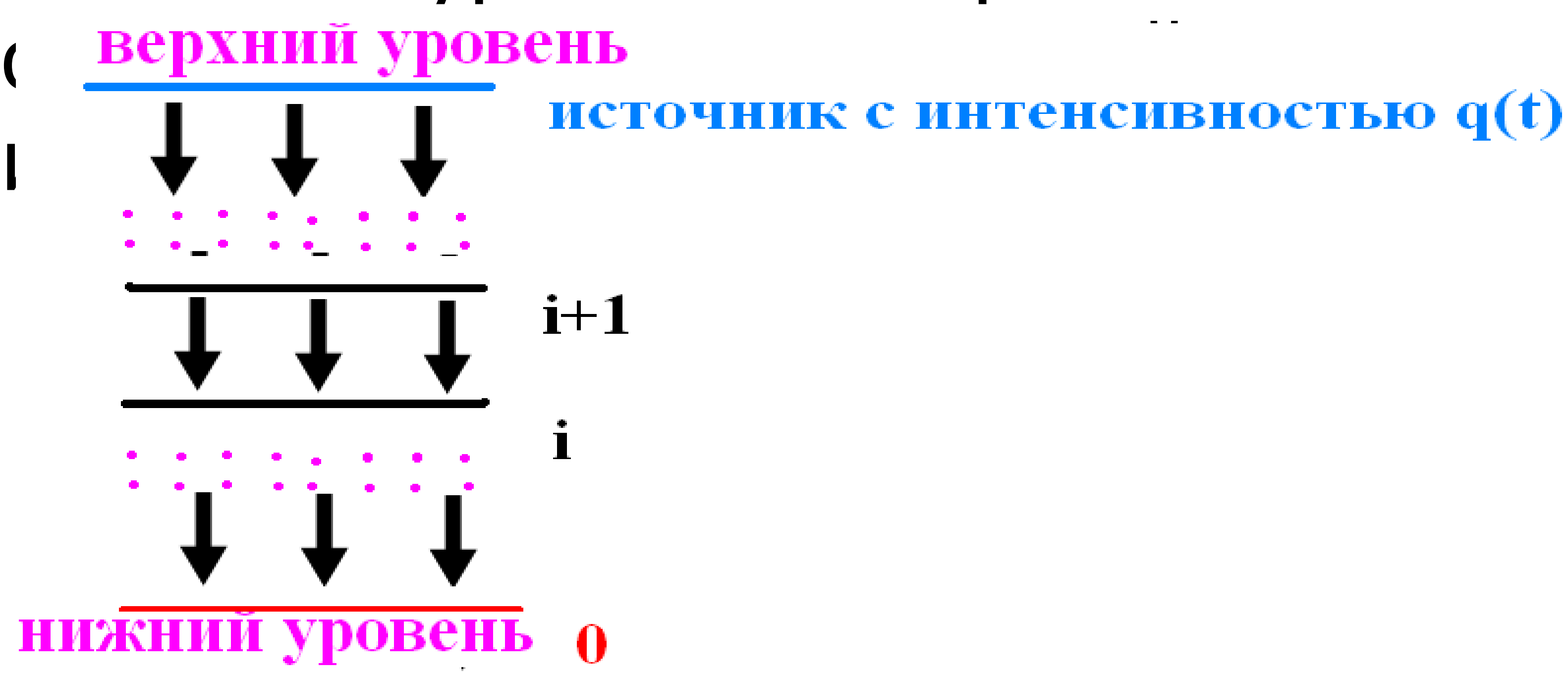
Иерархическая модель «принятия решений»

- Рассматривается иерархическая система, в которой на каждом уровне рождаются и уничтожаются «документы» по указаниям с вышележащего уровня

Модель переходов

- На каждом уровне находится не более N объектов
- Объект на уровне i+1 порождает λ

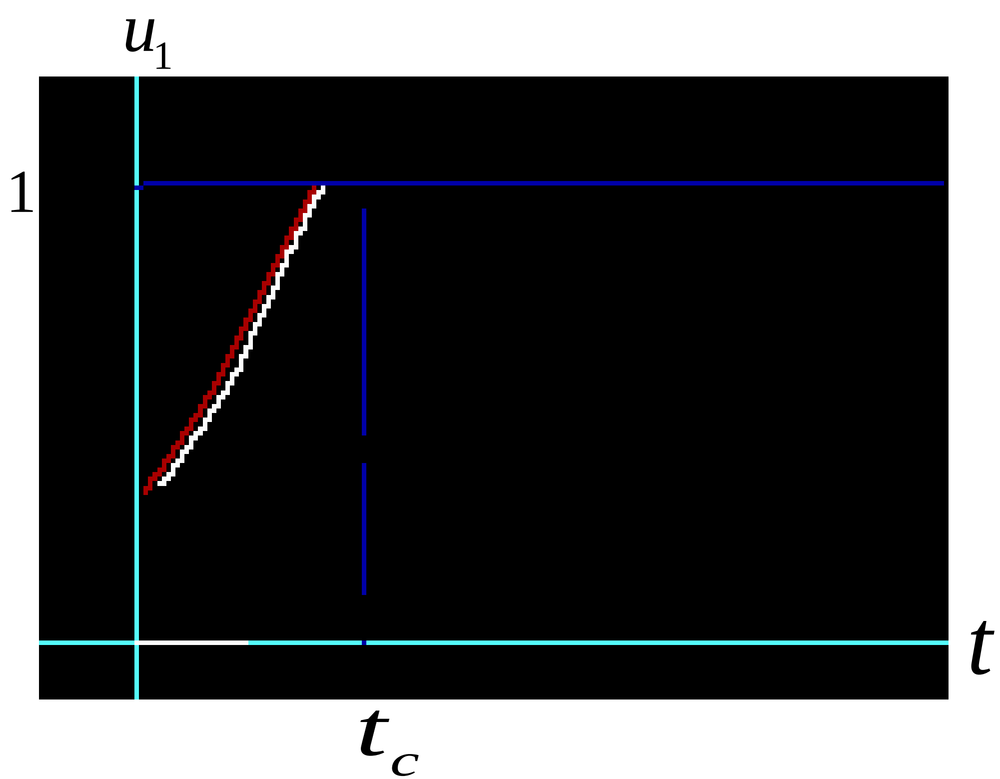
λ



Бесконечномерная система

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1}, \qquad u_i(t) = \gamma_i u_0^i(t) \quad i = 1, 2, \ldots \qquad \gamma_i = (i-1)!$$

$$\frac{du_0}{dt} = u_0^2$$



$$u_0(t) = \frac{u_0(0)}{1 - u_0(0)t} \le 1,$$

$$u_0(t) \equiv 1, \qquad \frac{u_0(0)}{1 - u_0(0)t} \ge 1$$

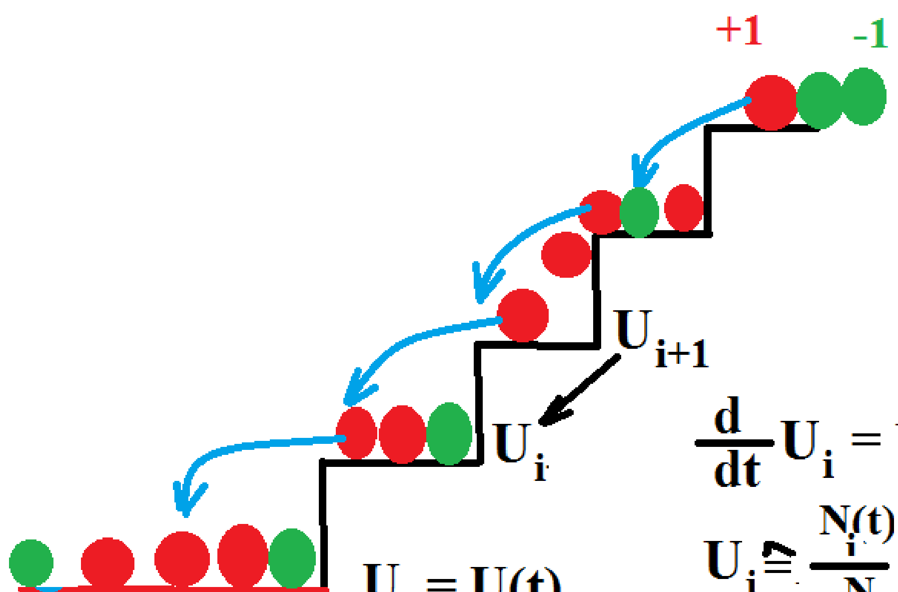
Модель переходов: каждое ОДУ с аналитической правой частью вкладывается в стандартную бесконечномерную систему

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Иерархическая «лестница» целочисленных переходов

заселенность уровня N(t) = сумма(+1)+сумма(-1)

число мест на уровне=N



$U_1 = U(t)$

$$\frac{d}{dt}U_i = U_{i+1} \quad , \ i=1, 2, \ldots$$

$$U_i = \frac{N_i(t)}{N}$$

$$\frac{d}{dt}U(t) = F(U(t))$$

Модель переходов

- При заполнении уровня появление новых объектов возможно лишь на освобождающиеся места
- Вычисление частоты появления объектов на уровне i выполняется по формуле

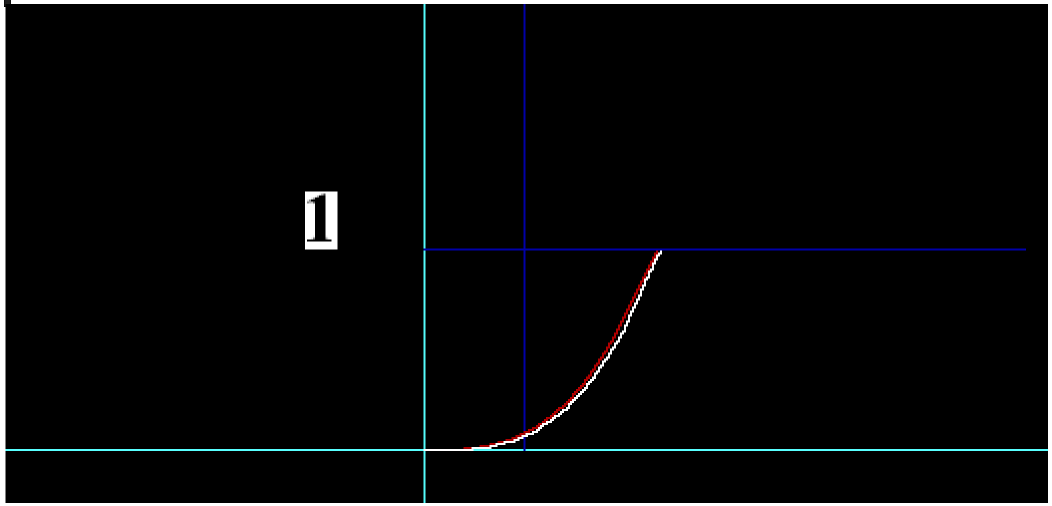
$$u_i = {}^{N_i}\!/\!_{N}$$

Сравнение результатов моделирования и расчетов; число уровней=20 , число частиц на уровне 10^3

$q_i = 0 \qquad i \le 19$

$q_{20} = 0.5$

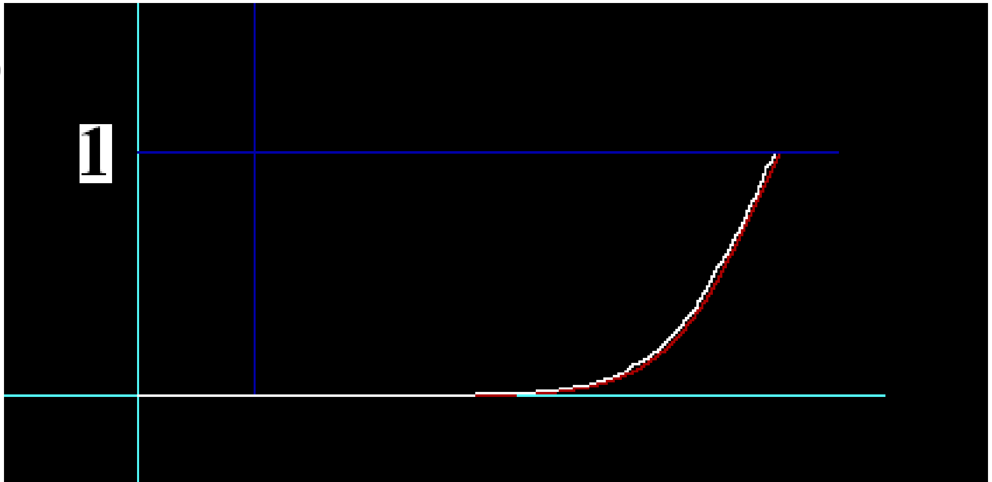
u_{18}



уровень 18

t

u_{10}



уровень 10

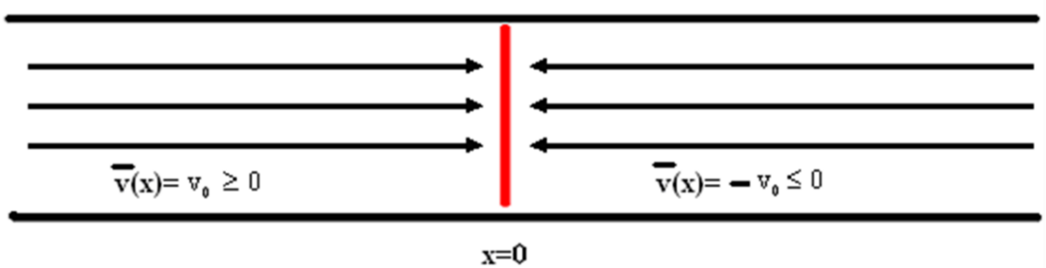
t

Решение в классе мер для встречных потоков газа (функциональные решения)

$$\rho(x,t) \mapsto \rho(dx,t) \qquad \Rightarrow \begin{cases} \mu(\rho,T,x,t) = \dfrac{1}{2} R \displaystyle\int_{x-l}^{x+l} T(x,t)\rho(dx,t), \\ \kappa(T,\rho,x,t) = \dfrac{5}{4} R \displaystyle\int_{x-l}^{x+l} T^2(x,t)\rho(dx,t), \end{cases}$$

$$\bar{v}(x,0) = -\operatorname{sgn}(x) v_0, \quad T(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_1, \quad \rho(x,0) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

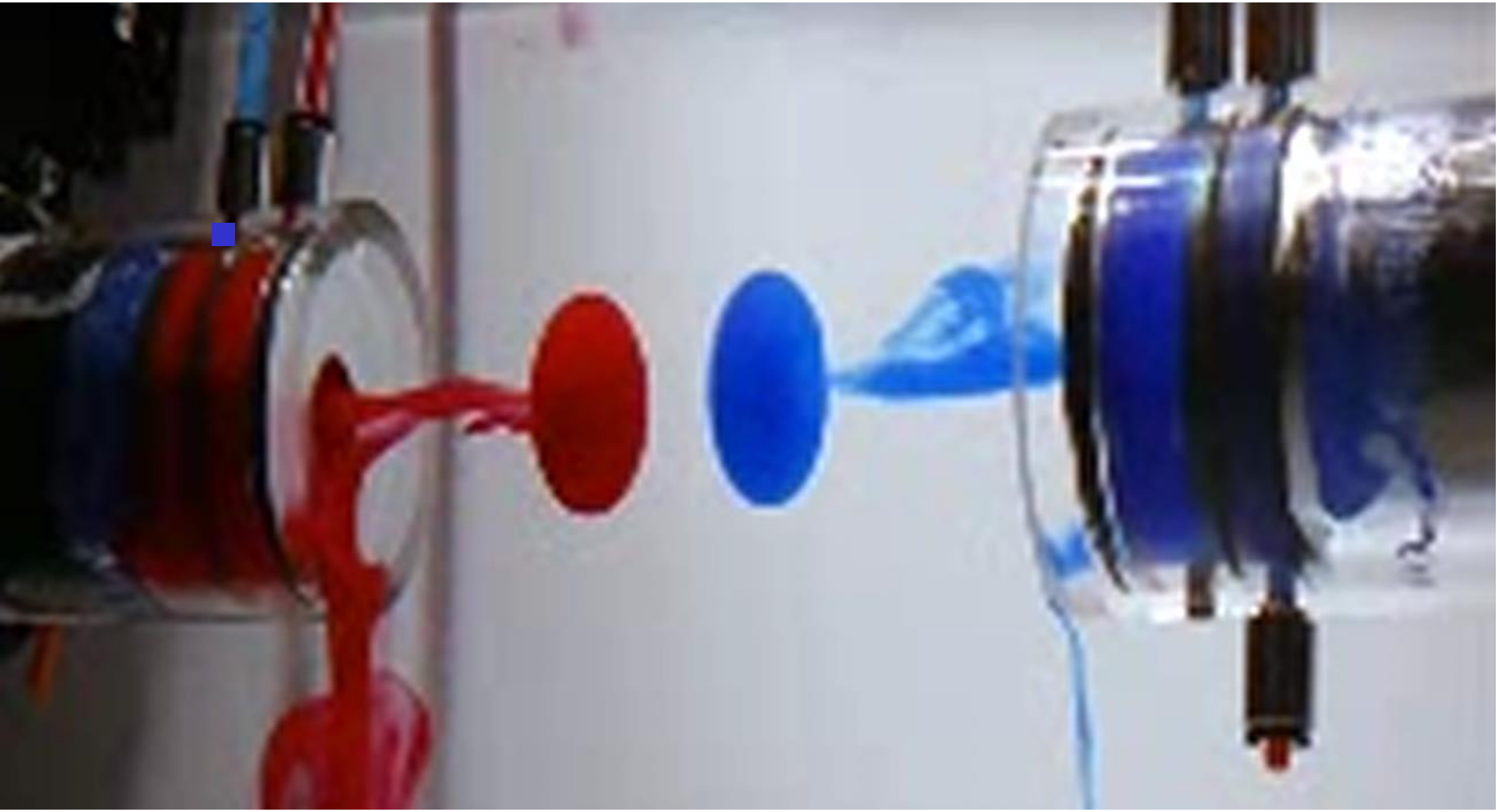
$$\bar{v}(x,t) = -\operatorname{sgn}(x) v_0, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}_1, \quad \rho(x,t) = \begin{cases} \rho_0, & x \neq 0, \\ 2tv_0\rho_0\delta_0, & x = 0, \end{cases} \quad t \geq 0,$$



$$T(x,t) = \begin{cases} \dfrac{v_0^2}{3R}, & x = 0, \quad t > 0, \\ 0, & x \neq 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

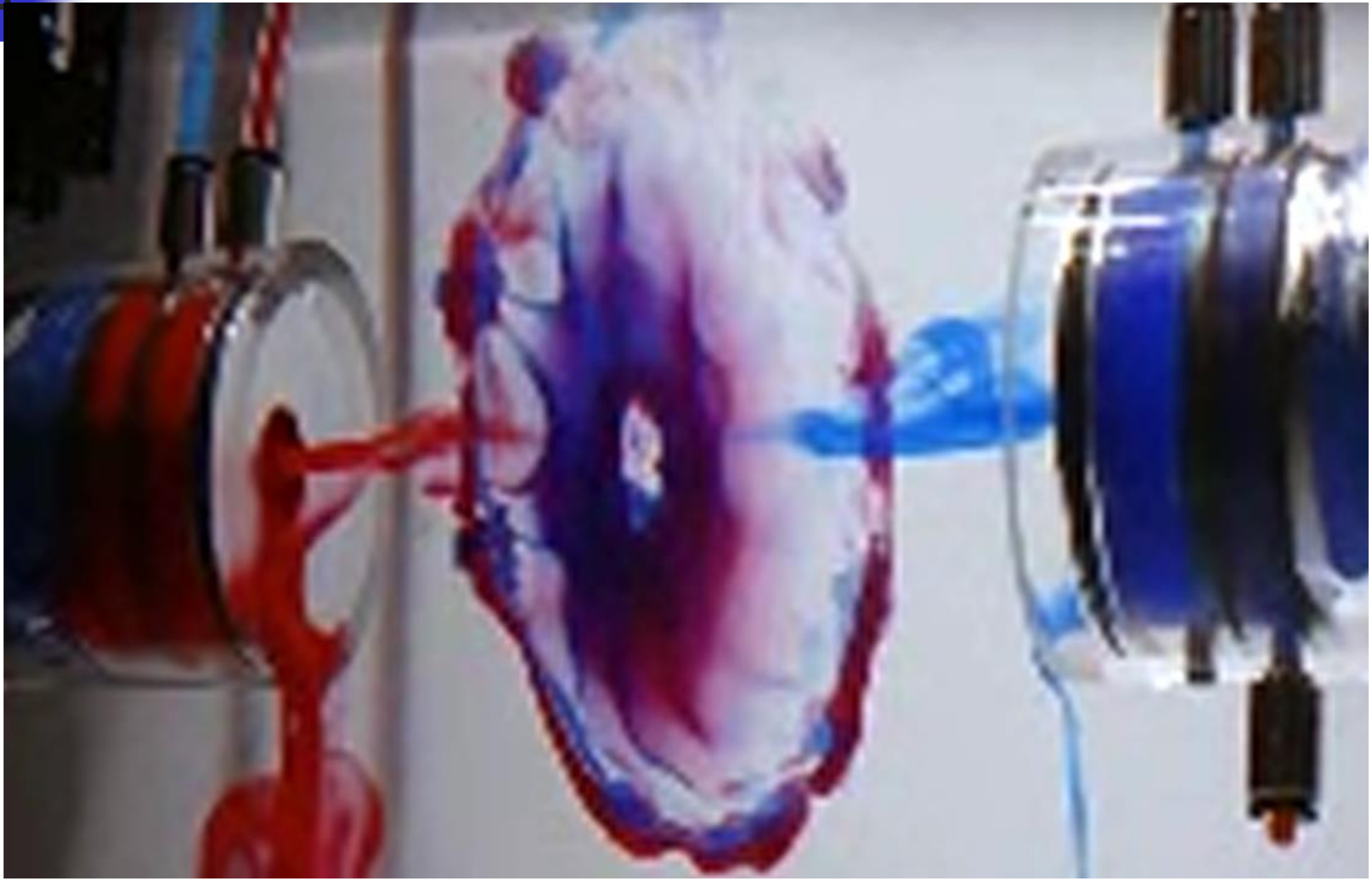
--область конденсации вещества при лобовом столкновении встречных потоков частиц

Столкновение встречных пучков (эксперимент)



Столкновение встречных пучков (эксперимент)

Столкновение встречных пучков (эксперимент)



Проблемы:

- Разработка универсального вычислительного алгоритма и устройства для УРЧП
- Обоснование прямого моделирования пространственно неоднородных задач
- Распараллеливание алгоритмов

Благодарим за внимание!