

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений *

Витяев Е.Е.^{1,2}, Неупокоев Н.В.²

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, vityaev@math.nsc.ru

² Новосибирский Государственный Университет

Аннотация. Предлагается формализация понятий: образ и восприятие. Восприятие образа рассматривается как непрерывный процесс предвосхищения (предсказания) образом поступающих стимулов и проверка предсказаний на соответствие реальным стимулам. Показывается, что формализацией этого процесса может быть неподвижная точка предсказаний. Проведено компьютерное моделирование, демонстрирующее работоспособность данной модели.

1. Введение

Теория Функциональных Систем П.К.Анохина начинается с принципа опережающего отражения действительности. Мозг непрерывно во времени предвосхищает события окружающей среды и одновременно контролирует акцептором результатов действия правильность сделанных предсказаний.

В восприятии предвосхищение (антиципация) непрерывно во времени сравнивает «образ» («образ мира») с наличной стимуляцией и является процессом активного движения от «образа» к внешнему миру – непрерывным во времени процессом проверки предсказаний «образа» на соответствие стимулам внешнего мира. Только если все многочисленные предсказания будут совпадать с реальными стимулами непрерывно во времени, только тогда есть восприятие [1]. «Все это позволяет нарисовать следующую картину хода познавательной деятельности на уровне восприятия. Индивид всегда имеет некоторый образ или модель окружения, которая непрерывна во времени и пространстве и носит прогностический характер, т.е. в ней экстраполируются и воспроизводятся на языке чувственных модальностей ожидаемые результаты воздействия источника стимула на наши органы чувств» [1].

У. Найсером восприятие описано схемами и перцептивными циклами. «Если образы суть предвосхищения, они должны облегчать последующее восприятие. Перцептивная готовность это не скромный побочный продукт визуализации, это её суть. Иметь перцептивную установку в отношении чего-либо это значит иметь образ». «По моему мнению, важнейшими для зрения когнитивными структурами являются предвосхищающие схемы, подготавливающие индивида к принятию информации строго определенного, а не любого вида и, таким образом, управляющие зрительной активностью. ... В каждый момент воспринимающим конструируются предвосхищения некоторой информации, делающие

* Эта работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований № 11-07-00560-а, интеграционными проектами СО РАН № 3, 87, 136 и программой президента Российской Федерации поддержки научных школ НШ-276.2012.1.

возможным для него принятие её. ... Эта исследовательская активность направляется все теми же предвосхищающими схемами, представляющими собой своего рода планы перцептивных действий. ... Термин «восприятие» относится ко всему циклу, а не к какой-то отдельной его части» [2].

Насколько известно авторам, в настоящее время нет формализации восприятия, как непрерывного во времени процесса предвосхищения стимулов воспринимаемого объекта и проверки этих предвосхищений на соответствие стимулам внешнего мира. В данной работе мы предлагаем такую формализацию в виде неподвижных точек (или инвариантов) предвосхищений.

Наиболее похожими подходами, в которых также есть неподвижная точка или «резонанс», являются работы Гроссберга и Хопфилда. В работах Гроссберга впервые говорится о «резонансе» между имеющейся моделью и поступающими стимулами – идентификация и распознавание объекта получаются в результате взаимодействия («резонанса») ожиданий «сверху-вниз» и сенсорной информацией «снизу-вверх» [3]. Принципиальное отличие нашего подхода от подхода Гроссберга состоит в том, что в нашей модели «резонанс» в виде неподвижной точки рассматривается внутри модели, а не вне её.

2. Формальная модель образа как неподвижной точки предвосхищений

Введем некоторые определения. Далее под предвосхищением будем понимать предсказание, а под схемой – совокупность закономерностей, предсказывающих, что будет воспринято в следующий момент времени при выполнении определенных перцептивных действий. Перефразируем высказывание Найсера в терминах закономерностей: в каждый момент времени воспринимающим извлекается из памяти весь опыт по восприятию данного объекта в виде совокупности закономерностей $Met = \{P_1 \& \dots \& P_k \& A \Rightarrow P_0\}$. Эти закономерности означают, что, если мы воспринимаем признаки $P_1 \& \dots \& P_k$, то после осуществления перцептивного действия A , переводящего взгляд на признак P_0 , мы воспримем значение признака P_0 .

Предположим, что объекты восприятия определяются набором значений признаков (стимулов) x_1, \dots, x_n . Каждый признак x_i принимает некоторое множество значений $I_i = \{x_1^i, \dots, x_k^i\}$, $i = 1, \dots, n$. Будем предполагать, что признаки на объектах могут принимать по несколько значений. Тогда воспринимаемый объект a описывается совокупностью подмножеств значений воспринимаемых признаков $X(a) = \{X_{j_1}(a), \dots, X_{j_m}(a)\}$, $X_{j_i}(a) \subset I_{j_1}, \dots, X_{j_i}(a) \subset I_{j_m}$, $X_{j_s}(a) \neq \emptyset$, $s = 1, \dots, m$. Восприниматься могут не все n признаков, а только m из них. Для каждого стимула (некоторого значения признака) определим предикат $P_j^i(a) \Leftrightarrow (x_j^i \in X_i(a))$. Предикат может быть с отрицанием $\bar{P}_j^i(a)$ или без него $P_j^i(a)$. Отрицание предиката в послышке правила означает, что нет данного стимула в поступающей информации. Предсказание отрицания предиката означает

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений

торможение соответствующего стимула. Предикат, который может быть, как с отрицанием, так и без него, обозначим через $\hat{P}_j^i(a)$.

Закономерности определим как высказывания вида $\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow \hat{P}_{j_0}^{i_0}$, в котором действие опущено, поскольку по значениям i_0, j_0 предиката $\hat{P}_{j_0}^{i_0}$ всегда ясно, на что надо обратить внимание и куда перевести взгляд (на признак i_0 и его значение j_0). Смысл действия в том, чтобы изменить воспринимаемую стимуляцию. В закономерности фактически записано, какое действие должно быть осуществлено – надо от восприятия признаков $\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k}$ перейти к восприятию признака $\hat{P}_{j_0}^{i_0}$. Закономерность представляет собой формализацию действия и одновременно предвосхищение результата действия. Все закономерности из Мет обнаруживаются в процессе самообучения семантическим вероятностным выводом, рассмотренным в разделе 4.

Будем говорить, что закономерность $\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow \hat{P}_{j_0}^{i_0}$ *извлекается из памяти* при восприятии объекта a , если посылка $\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k}$ закономерности и, значит, все предикаты, входящие в нее, становятся истинными на объекте a , т.е. когда $x_{j_s}^{i_s} \in X_{i_s}(a)$, если предикат $\hat{P}_{j_s}^{i_s}$ не имеет отрицания и $x_{j_s}^{i_s} \notin X_{i_s}(a)$, если предикат $\bar{\hat{P}}_{j_s}^{i_s}$ имеет отрицание, $s = 1, \dots, k$. Обозначим через $LP(X(a)) \subseteq \text{Мет}$ множество закономерностей, извлекаемых из памяти при восприятии объекта a . Если закономерность $\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow \hat{P}_{j_0}^{i_0}$ применима к воспринимаемому объекту a и её заключение $\hat{P}_{j_0}^{i_0}$ истинно в указанном смысле ($x_{j_0}^{i_0} \in X_{i_0}(a)$, если предикат $\hat{P}_{j_0}^{i_0}$ не имеет отрицания и $x_{j_0}^{i_0} \notin X_{i_0}(a)$, если предикат $\bar{\hat{P}}_{j_0}^{i_0}$ имеет отрицание), то будем говорить, что предвосхищение, осуществляемое закономерностью, *подтвердилось* на объекте a , в противном случае *опроверглось*.

Восприятие объекта a – это непрерывный цикл предсказаний одних свойств объекта по другим свойствам посредством всех извлечённых из памяти закономерностей и проверка того, что все эти закономерности подтвердились. В этом случае перцептивный цикл завершен, и все предсказания стимулов $\hat{P}_{j_0}^{i_0}$ совпали с наличной стимуляцией. Если предсказывается отрицание стимула, то его не должно быть в образе – это процесс вытормаживания стимулов. Возможные противоречия в предсказаниях закономерностей решаются на основании специального критерия Kgit максимальной согласованности предсказаний, приведённого в разделе 4.

Восприятие, как непрерывный цикл перцептивных действий и предсказаний вместе с проверкой предсказаний на совпадение с реальными стимулами, формально может быть описан неподвижной точкой предсказаний (своеобразным «резонансом» закономерных связей).

Определим оператор предсказания Pr, применённый к некоторому множеству стимулов $X = \{X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_m}\}$ (это могут быть признаки $X(a)$ объекта a , либо целая картина или сцена, описываемая множеством признаков X). Используя все «извлечённые из памяти» закономерности $(\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow P_{j_0}^{i_0}) \in LP(X)$ этот оператор предсказывает наличие стимулов $x_{j_0}^{i_0}$ в восприятии, если предикат $P_{j_0}^{i_0}$ не имеет отрицания и предсказывает отсутствие стимула $\bar{x}_{j_0}^{i_0}$, если предикат $\bar{P}_{j_0}^{i_0}$ имеет отрицание. Тогда оператор предсказания Pr может быть записан следующим образом:

$$Pr(X) = \Phi_{\text{Крит}}(X \cup \{x_{j_0}^{i_0} \mid (\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow P_{j_0}^{i_0}) \in LP(X)\} \cup \{\bar{x}_{j_0}^{i_0} \mid (\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow \bar{P}_{j_0}^{i_0}) \in LP(X)\}),$$

где функция $\Phi_{\text{Крит}}$ минимизирует возможные противоречия в предсказаниях, используя специальный критерий согласованности Kcrit закономерностей по предсказанию. Подробное определение Kcrit и $\Phi_{\text{Крит}}$ приведено в разделе 4.

В восприятии осуществляется не один цикл предвосхищений. Циклы предвосхищений должны пройти несколько раз, чтобы исчезли противоречия между предвосхищениями и реальными стимулами. Когда это достигнуто, то восприятие объекта a завершено и мы имеем неподвижную точку оператора Pr. Если восприятие началось с восприятия стимулов $X(a)$ объекта a , то после нескольких итераций предвосхищения оператором Pr получим неподвижную точку – образ объекта a . В этой неподвижной точке достигается единство двух сущностей – совокупности признаков и закономерностей, которым они удовлетворяют. Совокупность признаков X этой неподвижной точки – это признаки, которые предсказываются оператором Pr, отправляясь от признаков $X(a)$ объекта a , используя все закономерности, применимые к объекту a . А закономерности этой неподвижной точки – это закономерности, которые не только применимы к множеству стимулов X , но и в максимальной степени (в соответствии с критерием Kcrit) подтверждаются на нем, образуя своеобразный «резонанс» предсказаний и подтверждений этих предсказаний на множестве стимулов X .

Обозначим n -кратное применение оператора Pr через Pr^n . Тогда восприятие стимулов объекта a в виде неподвижной точки оператора Pr будет определяться равенством $Pr^{n+1}(X(a)) = Pr^n X(a)$, где n – этап стабилизации предвосхищений. Более детальное описание этого процесса дано в разделе 4.

Приведём компьютерные эксперименты, иллюстрирующие введенные понятия на примере закодированных цифр.

3. Эксперименты по автоматическому обнаружению неподвижных точек цифр в режиме самообучения

Проиллюстрируем нахождение неподвижных точек восприятия с помощью

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений

цифр. Закодируем цифры горизонтальными, вертикальными и диагональными линиями, расположенными в квадратах от 1 до 24 как указано в табл. 1. Вместе с белым пространством они образуют 7 признаков клетки. На рис. 1 видно, что есть некоторые разрывы в цифрах, но на результат восприятия это никак не влияет. Некоторые линии цифр кодируются дважды, например, вертикальная линия у цифр 4 и 1 кодируется, как вертикальной правой линией (признак 3) в клетках 3,7,11,15,19,23, так и вертикальной левой линией (признак 5) в клетках 4,8,12,16,20,24.

Нами было проведено два компьютерных эксперимента.

Таблица 1. Кодировка полей цифр.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24

3.1. Первый эксперимент был проведен на обучающем множестве **A**, состоящем из 360 цифр (12 цифр рис. 1 дублировались в 30-ти экземплярах), которое представлялось как единое множество объектов без указания, где какая цифра. Эксперимент состоял в том, чтобы найти все неподвижные точки на этом множестве и убедиться, что они порождают образы, соответствующие на-

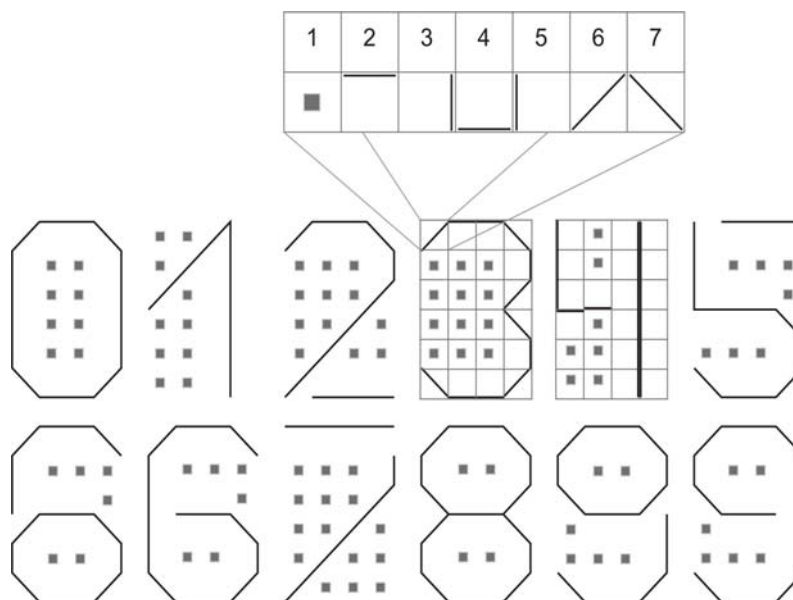


Рис. 1. Кодировка цифр.

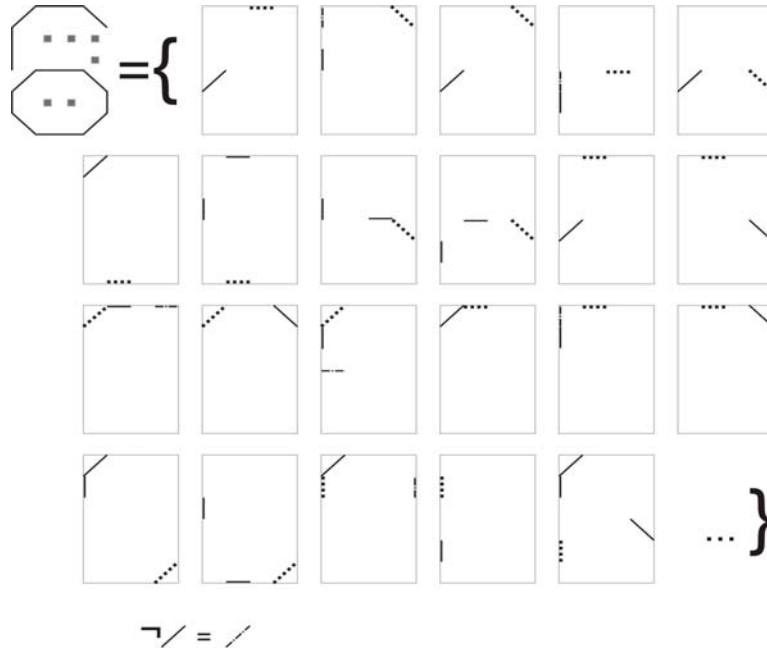


Рис. 3. Неподвижная точка цифры 6.

шим 12 цифрам.

На обучающем множестве **A** было обнаружено 55089 закономерностей. Алгоритм обнаружения закономерностей приведен в разделе 4. Этот алгоритм со-

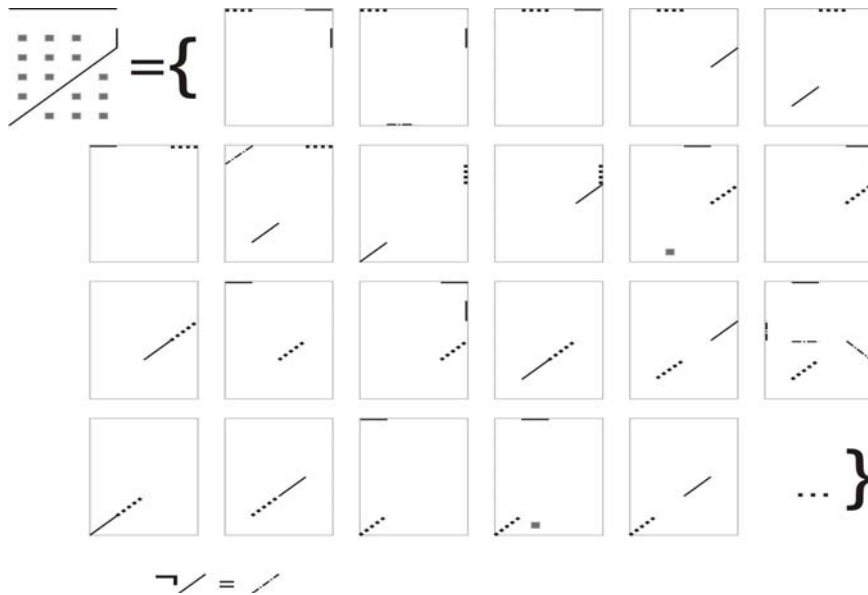


Рис. 2. Неподвижная точка цифры 7.

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений

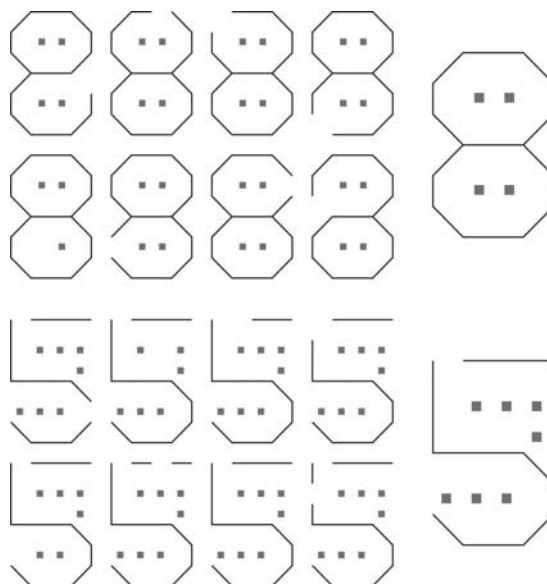


Рис. 4. Цифры с отсутствующими признаками.

стоит в таком переборе всех возможных закономерностей, который итеративно увеличивает вероятность предсказания признаков образов. По этим закономерностям оператором предсказания P_f было построено 12 неподвижных точек, которые в точности соответствовали нашим цифрам. Алгоритм обнаружения неподвижных точек также приведен в разделе 4. Таким образом, на данном множестве образов алгоритм обнаружения неподвижных точек в точности решает задачу обнаружения заданных образов.

Рассмотрим на примере цифры 6 (рис. 2), что представляет собой неподвижная точка (вставка снизу показывает вид отсутствующего признака). Первая закономерность цифры 6, представленная в первом прямоугольнике после фигурной скобки, говорит, что, если в квадрате 13 (табл. 1) стоит признак 6 (обозначим это как 13-6), то в квадрате 3 должен стоять признак 2 (обозначим также как (3-2)). Предсказываемый признак обозначается точечной линией. Запишем эту закономерность как $(13-6 \Rightarrow 3-2)$. Нетрудно проверить по цифрам, что эта закономерность действительно имеет место на множестве \mathbf{A} . Вторая закономерность говорит, что из признака (9-5) и отрицания значения 5 первого признака $\neg(1-5)$ (первый признак не должен быть равен 5) следует признак (4-7). Отрицание $\neg|$ значения $|$ с номером 5 некоторого признака или отрицание $\neg/$ значения $/$ с номером 6 некоторого другого признака обозначается пунктирной линией (точка-пунктир), как показано в нижней части рисунков 2 и 3. В результате получаем закономерность $(9-5 \& \neg(1-5) \Rightarrow 4-7)$. Последующие 3 закономерности в первой строке цифры 6 на рис. 2 будут соответственно закономерности $(13-6 \Rightarrow 4-7)$, $(17-5 \& \neg(13-5) \Rightarrow 4-7)$, $(13-6 \Rightarrow 16-7)$.

На рис. 2 видно, что закономерности и признаки цифры 6 образуют неподвижную точку, осуществляя «резонанс» предсказаний и подтверждений. На рис.

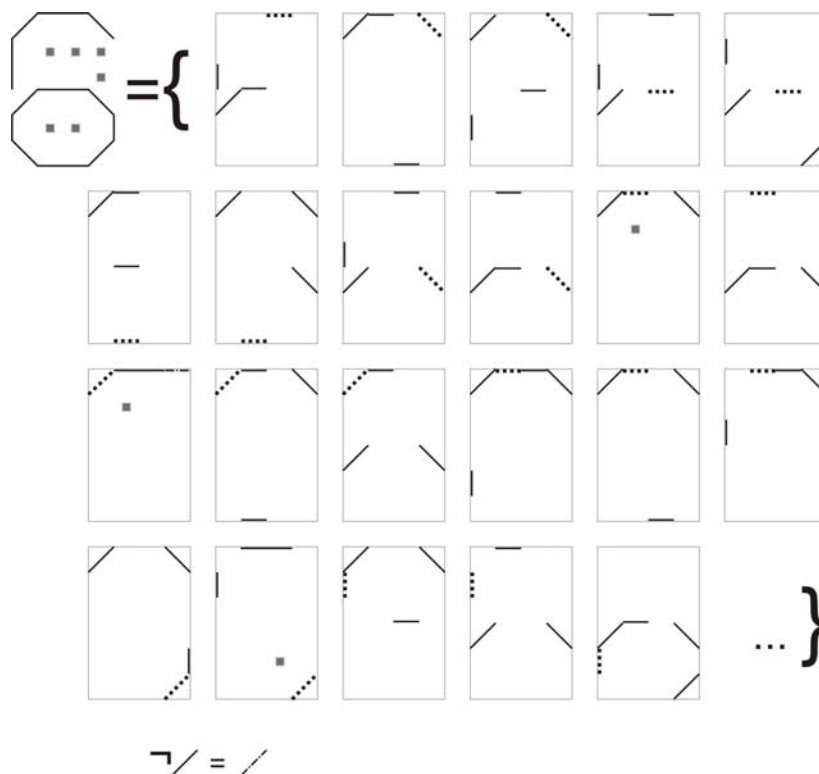


Рис. 5. Неподвижная точка цифры 6 по данным с неполной информацией.

3 приведён пример неподвижной точки цифры 7.

3.2. Второй эксперимент состоял в том, чтобы обнаружить эти же образы в условиях недостатка информации. В качестве данных было взято множество **B**, включающее те же 12 цифр в 30-ти экземплярах каждая, но с пробелами в информации – в каждой цифре отсутствовал один случайно выбранный признак, как показано на рис. 4. К полученным 360 цифрам была добавлена отрицательная выборка, состоящая из 1050 объектов со случайными признаками. На этих данных было обнаружено 73458 закономерностей. По этим закономерностям оператором предсказания P_g также были обнаружены неподвижные точки, которых оказалось 14. Из них 12 цифр это цифры рис. 1 и для цифр 6 и 9 ещё по одной неподвижной точке, содержащих пробелы в 13-м признаке для цифры 6 и в 12-м признаке для цифры 9.

На рис. 5 показана неподвижная точка цифры 6, полученная по этим данным. На рис. 5 видно, что закономерности здесь более сложные, чем на рис. 2, так как данные более сложные и для более надёжного взаимного предсказания признаков цифр требуются закономерности с более точным условием, содержащим больше предикатов в посылке правила.

Отнесение некоторой цифры с недостающим признаком к некоторому образу (распознавание цифры) осуществляется тем же оператором предсказания P_g , путем построения неподвижной точки, отправляясь от признаков X этой цифры.

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений

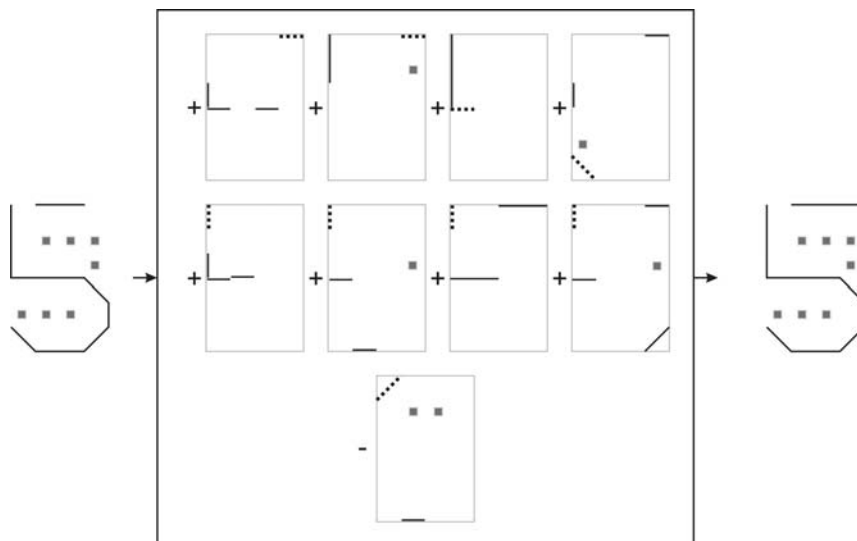


Рис. 6. Восстановление образа посредством неподвижной точки восприятия.

Например, для цифры 5 первыми двумя закономерностями верхней строки рис. 6 предсказывается недостающий признак – хвостик в верхнем правом углу, которого нет в исходной цифре.

На второй и третьей строке рис. 6 представлены закономерности, предсказывающие признак в квадрате 1. Во второй строке представлены закономерности, которые предсказывают значение признака 5 (вертикальная линия), а в третьей строке приведена единственная обнаруженная закономерность, предсказывающая значение признака 6 (косая линия) для первого квадрата. В процессе распознавания и восстановления недостающей информации в цифре, могут возникать противоречия, как в данном случае, предсказывающие различные значения признака в квадрате с недостающей информацией. Эти противоречия разрешаются критерием максимальной согласованности предсказаний и оператором $\Phi_{\text{Крит}}$ модификации стимулов (см. определения в разделе 4). Критерий согласованности закономерностей в этом случае отдает предпочтение более сильному предсказанию (по четырем закономерностям второй строки) вертикальной линии, игнорируя (вытормаживая) предсказание косой линии. При этом критерий $\Phi_{\text{Крит}}$ учитывает и другие закономерности, которые взаимно предсказывают признаки цифры 5, как например, третья и четвертая закономерности первой строки рис. 6. Тогда цифра 5 восстанавливается полностью и правильно. В нашем эксперименте все 360 цифр с пробелами в информации были распознаны правильно.

4. Математическое определение неподвижной точки

Для полного определения оператора предсказания Pg , приведенного в конце 2-го раздела, необходимо определить множество закономерностей Mem , критерий максимальной согласованности предсказаний $Krit$ и функцию $\Phi_{\text{Крит}}$.

Обозначим через $\Pi = \{\hat{P}_j^i, i=1, \dots, n; j=1, \dots, k_i\}$ множество всех предикатов, фиксирующих поступающие стимулы (напомним, что под обозначением \hat{P}_j^i мы понимаем либо сам предикат P_j^i , либо его отрицание \bar{P}_j^i).

Все закономерности из Мем получаются *семантическим вероятностным выводом* (СВВ) [4-6]. Описательно СВВ рассмотрен в [6], где показано, что он формализует правило Хебба образования условных связей на уровне нейрона. Семантический вероятностный вывод устроен так, что он автоматически включает в закономерность все стимулы, которые могут усилить предсказание (увеличить условную вероятность) интересующего нас стимула (например, того, на который будет переведён взгляд).

Формально СВВ определяется как последовательность правил $R_1 \mid R_2 \mid \dots \mid R_m$, которые от номера к номеру все сильнее предсказывают интересующий нас стимул, заданный предикатом $P_0 \in \Pi$. Эта последовательность должна удовлетворять следующим условиям:

1. $R_i = (P_1^i \& \dots \& P_{k_i}^i \Rightarrow P_0), P_j^i \in \Pi, i=1, \dots, m;$
2. R_i – подправило правила R_{i+1} , т.е. $\{P_1^i, \dots, P_{k_i}^i\} \subset \{P_1^{i+1}, \dots, P_{k_{i+1}}^{i+1}\};$
3. $\text{Pr ob}(R_i) < \text{Pr ob}(R_{i+1}), i=1, 2, \dots, m-1$, где
 $\text{Pr ob}(R_i) = \text{Pr ob}(P_0 / P_1^i \& \dots \& P_{k_i}^i)$ – условная вероятность правила;
4. R_i – *вероятностные законы*, т.е. для любого подправила
 $R' = (P_1 \& \dots \& P_k \Rightarrow P_0)$ правила $R_i, \{P_1, \dots, P_k\} \subset \{P_1^i, \dots, P_{k_i}^i\}$ выполнено неравенство $\text{Pr ob}(R') < \text{Pr ob}(R_i);$
5. R_m – *максимально специфический закон*, для которого цепочка правил $R_1 \mid R_2 \mid \dots \mid R_m$ не может быть продолжена, т.е. для R_m не существует правила R_{m+1} удовлетворяющего условиям 1-4.

Предикат $P_0 \in \Pi$ может предсказываться различными семантическими вероятностными выводами, поэтому полное множество правил, предсказывающих предикат $P_0 \in \Pi$, образует решетку $\text{Lat}(P_0)$ семантических вероятностных выводов. Полное множество закономерностей $\text{Мем}(P_0)$, которые участвуют в предсказании предиката $P_0 \in \Pi$, состоит из всех вероятностных законов, входящих в $\text{Lat}(P_0)$. Вся память Мем есть объединение всех закономерностей $\text{Мем}(P_0)$ для всех предсказываемых предикатов $P_0 \in \Pi$.

Алгоритм обнаружения закономерностей из Мем в точности следует данному определению и состоит из следующих шагов:

1. На вход алгоритма подается обучающее множество воспринятых объектов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, для которых известны все стимулы в виде значений всех предикатов из Π ;

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений

2. для обнаружения всех вероятностных законов, входящих в $Lat(P_0)$, фиксируем некоторый предикат $P_0 \in \Pi$;
3. для предиката $P_0 \in \Pi$ осуществляем базовый перебор глубины d правил множества $Base_d(P_0) = B_1(P_0) \cup \dots \cup B_d(P_0)$, где
 $B_1(P_0) = \{(P \Rightarrow P_0), P \in \Pi\}$, ..., $B_d(P_0) = \{(P_1 \& \dots \& P_d \Rightarrow P_0), P_1, \dots, P_d \in \Pi\}$;
4. перебираем все правила из каждого множества $B_i(P_0)$, $i = 1, \dots, d$ и удаляем те из них, которые не являются вероятностными законами. Для проверки, является ли некоторое правило вероятностным законом, применяем специальный оператор LP , проверяющий выполнение пункта 4 определения СВВ. При этом вероятностные неравенства $Pr ob(R') < Pr ob(R_i)$ из пункта 4 проверяем по имеющимся данным точным критерием независимости Фишера [7]. В результате получим множества $BP_i(P_0) = LP(B_i(P_0))$, $i = 1, \dots, d$ правил, содержащих только вероятностные законы. В результате базового перебора глубины d получим множество $Mem(P_0) = BP_1(P_0) \cup \dots \cup BP_d(P_0)$;
5. Далее осуществляем направленный перебор правил, который состоит в уточнении правил из $BP_d(P_0)$. Для этого правила наращиваются оператором уточнения T следующим образом:
 $T(BP_d(P_0)) = \{(P'_1 \& \dots \& P'_{d+1} \Rightarrow P_0) \mid (P_1 \& \dots \& P_d \Rightarrow P_0) \in BP_d(P_0),$
 $\{P_1, \dots, P_d\} \subset \{P'_1, \dots, P'_{d+1}\}, P_1, \dots, P_{d+1} \in \Pi\}$.
6. К уточнённым правилам снова применяем оператор проверки на вероятностные законы LP и получим новое множество вероятностных законов $P_{d+1}(P_0) = LP(T(BP_d(P_0)))$, выходящих за базовый перебор.
7. Дальнейшее наращивание множества вероятностных законов $Mem(P_0)$ происходит рекурсивно применением операторов T и LP , $P_{d+i}(P_0) = LP(T(P_{d+i-1}(P_0)))$, $i > 1$. Наращивание заканчивается на этапе t , когда уже не хватает данных для статистической проверки критерия Фишера. Тогда $P_{d+t}(P_0) = LP(T(BP_{d+t-1}(P_0))) = P_{d+t-1}(P_0)$;
8. Все множество вероятностных законов $Mem(P_0)$ получается объединением всех вероятностных законов, полученных как в результате базового перебора, так и направленного:
 $Mem(P_0) = BP_1(P_0) \cup \dots \cup BP_d(P_0) \cup P_{d+1}(P_0) \cup \dots \cup P_{d+t-1}(P_0)$;
9. Для определения всего множества Mem , переходим к пункту 2 и выбираем новый, не рассмотренный ранее предикат $P_0 \in \Pi$.

Определим функцию $\Phi_{\text{Крит}}$ минимизации возможных противоречий в предсказаниях и критерий согласованности предсказаний Крит .

Оператор предсказания Pr предсказывает два множества стимулов, которые должны присутствовать $x_{j_0}^{i_0}$ и которые должны отсутствовать $\bar{x}_{j_0}^{i_0}$:

$$\bullet \ Pr^+(X) = \{x_{j_0}^{i_0} \mid (\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow P_{j_0}^{i_0}) \in LP(X)\} ;$$

$$\bullet \text{Pr}^-(X) = \{\bar{x}_{j_0}^{i_0} \mid (\hat{P}_{j_1}^{i_1} \& \dots \& \hat{P}_{j_k}^{i_k} \Rightarrow \bar{P}_{j_0}^{i_0}) \in \text{LP}(X)\}.$$

Тогда оператор предсказания Pr примет вид:

$$\text{Pr}(X) = \Phi_{\text{Krit}}(X \cup \text{Pr}^+(X) \cup \text{Pr}^-(X))$$

Определим функцию Φ_{Krit} на множестве стимулов $Y = X \cup \text{Pr}^+(X) \cup \text{Pr}^-(X)$.

Она либо добавляет один элемент $x_{j_0}^{i_0}$ во множество X , либо удаляет один элемент $\bar{x}_{j_0}^{i_0}$ из множества X . При этом, она учитывает предсказания не отдельных правил из $\text{LP}(X)$, а их взаимную согласованность по предсказаниям (их закономерный «резонанс»).

Для этого используется специальный критерий Krit взаимной согласованности закономерностей по предсказанию, который определяется следующим образом. Пусть $S(X) \subset \text{LP}(X)$ – множество закономерностей, подтверждающихся на интересующем нас наборе стимулов X , а $F(X) \subset \text{LP}(X)$ – множество закономерностей, опровергающихся на наборе X . Тогда критерий Krit есть сумма весов подтверждающихся закономерностей минус сумма весов опровергающихся закономерностей:

$$\text{Krit}(X) = \sum_{R \in S(X)} \mu(R) - \sum_{R \in F(X)} \mu(R), \text{ где } \mu(R) = -\log(1 - \text{Pr ob}(R)).$$

Функция $-\log(1 - \text{Pr ob}(R))$ учитывает не саму вероятность, а её близость к 1. Логарифм берется потому, что рассматривается логарифм критерия и величины суммируются, а не перемножаются.

Функция Φ_{Krit} при добавлении/удалении какого-то элемента $x_{j_0}^{i_0} / \bar{x}_{j_0}^{i_0}$ во множество X , должна строго увеличивать взаимную согласованность всех применимых к $X \cup x_{j_0}^{i_0}$ или к $X \setminus \bar{x}_{j_0}^{i_0}$ закономерностей и должно выполняться либо неравенство $\text{Krit}(X) < \text{Krit}(X \cup x_{j_0}^{i_0})$, либо неравенство $\text{Krit}(X) < \text{Krit}(X \setminus \bar{x}_{j_0}^{i_0})$. В противном случае множество X остается без изменений. В обоих случаях нас интересует такое добавление/удаление элемента, которое максимально увеличивает критерий. Эти изменения критерия равны соответственно:

$$\delta^+(X) = \max_{x_{j_0}^{i_0} \in \text{Pr}^+(X)} \{\text{Krit}(X \cup x_{j_0}^{i_0}) - \text{Krit}(X)\},$$

$$\delta^-(X) = \max_{\bar{x}_{j_0}^{i_0} \in \text{Pr}^-(X)} \{\text{Krit}(X \setminus \bar{x}_{j_0}^{i_0}) - \text{Krit}(X)\}.$$

Функция Φ_{Krit} добавляет/удаляет элемент из множества X , который максимизирует соответствующее значение. Эти элементы определяются следующим образом:

$$x_{j_0}^{i_0}(X) = \arg \max_{x_{j_0}^{i_0} \in \text{Pr}^+(X)} (\text{Krit}(X \cup x_{j_0}^{i_0})), \quad \bar{x}_{j_0}^{i_0}(X) = \arg \max_{\bar{x}_{j_0}^{i_0} \in \text{Pr}^-(X)} (\text{Krit}(X \setminus \bar{x}_{j_0}^{i_0}))$$

При каждом применении оператора предсказания Pr функция Φ_{Krit} не одновременно добавляет/удаляет элемент из множества X , а выбирает тот из них, который максимально увеличивает критерий, т.е. добавляет элемент $x_{j_0}^{i_0}(X)$,

Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений

если $\delta^+(X) > \delta^-(X)$, $\delta^+(X) > 0$ и удаляет элемент $\bar{x}_{j_0}^{i_0}(X)$, если $\delta^-(X) > \delta^+(X)$, $\delta^-(X) > 0$.

Итак, функция модификации $\Phi_{\text{крит}}$ определяется следующим образом:

$$\Phi_{\text{крит}}(X) = \begin{cases} X \cup x_{j_0}^{i_0}(X), & \text{если } \delta^+(X) > \delta^-(X), \delta^+(X) > 0, \\ \quad x_{j_0}^{i_0}(X) = \arg \max_{x_{j_0}^{i_0} \in \text{Pr}^+(X)} (\text{Krit}(X \cup x_{j_0}^{i_0})) \\ X \setminus \bar{x}_{j_0}^{i_0}(X), & \text{если } \delta^-(X) \geq \delta^+(X), \delta^-(X) > 0, \\ \quad \bar{x}_{j_0}^{i_0}(X) = \arg \max_{\bar{x}_{j_0}^{i_0} \in \text{Pr}^-(X)} (\text{Krit}(X \setminus \bar{x}_{j_0}^{i_0})) \\ X, & \text{если } \delta^+(X) \leq 0 \text{ и } \delta^-(X) \leq 0. \end{cases}$$

Неподвижная точка $\text{Pr}^{n+1}(X) = \text{Pr}^n(X)$ получается в третьем случае, когда добавление/удаление элемента не увеличивает критерий.

Алгоритм обнаружения неподвижных точек точно следует данным определениям:

1. на вход алгоритма подается множество воспринятых в данный момент стимулов X и множество закономерностей $\text{LP}(X)$;
2. обнаруживаются множества $\text{Pr}^+(X)$ и $\text{Pr}^-(X)$;
3. применяется оператор предсказания $\text{Pr}(X) = \Phi_{\text{крит}}(X \cup \text{Pr}^+(X) \cup \text{Pr}^-(X))$ к множеству X , в результате чего оно изменяется на один элемент;
4. применяем оператор предсказания до тех пор, пока не получим неподвижную точку $\text{Pr}^{n+1}(X) = \text{Pr}^n(X)$.
5. переходим к пункту 1 и выбираем новое множество X . Выбор различных совокупностей множеств X зависит от решаемой задачи. В нашем примере с цифрами мы брали последовательно множества $X(\hat{a}) \in \hat{A}$ для экспериментов со множеством A и $X(\hat{a}) \in \hat{A}$ для экспериментов со множеством B .

5. Выводы

Таким образом, приведенная формализация показала свою эффективность на нетривиальном примере. С теоретической точки зрения данная формализация подтверждается важными теоретическими свойствами, положенного в её основу семантического вероятностного вывода [4-6]. Кроме того, эта же формализация неподвижных точек, но для случая правил без отрицаний, может быть положена в основу вероятностного обобщения анализа формальных понятий [8], что показано в работах [9-10].

Приведённая формализация восприятия и образа, приведенная в работе, может быть продолжена до построения «образа мира» [1]. Неподвижные точки, в которых стимулы X связаны «резонансом» предсказаний по закономерностям, представляют собой не фотографическое, а закономерное – «идеальное» отражение внешнего мира. «Образ мира» – это совокупность вложенных неподвиж-

ных точек образов объектов внешнего мира.

Рассмотренный в работе пример с цифрами, хотя и является модельным, но, тем не менее, является достаточно сложным, что позволяет говорить о возможности решения алгоритмом неподвижных точек нетривиальных прикладных задач.

Первоначально данный алгоритм рассматривался нами как алгоритм «естественной» классификации и имел самостоятельное обоснование (см. работы по «естественной» классификации на сайте [11]). В таком виде алгоритм успешно применялся для решения задач биоинформатики [12].

Список литературы

1. Смирнов С.Д. Психология образа. МГУ, М., 1985, с.231
2. Найсер У. Познание и реальность. “Прогресс”, М. 1981, с. 229.
3. Carpenter, G.A. & Grossberg, S., Adaptive Resonance Theory, In Michael A. Arbib (Ed.), The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, Second Edition, Cambridge, MA: MIT Press, 2003, pp. 87-90.
4. Витяев Е.Е. Извлечение знаний из данных. Компьютерное познание. Модели когнитивных процессов // Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск, 2006. с.293.
5. Evgenii Vityaev. The logic of prediction. In: Mathematical Logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (August 16-19, 2005, Novosibirsk, Russia), edited by S.S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, World Scientific, Singapore, 2006, pp.263-276
6. Витяев Е.Е., Перловский Л.И., Ковалерчук Б.Я., Сперанский С.О. Вероятностная динамическая логика мышления. Нейроинформатика, 2011, том 5, № 1, стр. 1-20
7. Кендал М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. С. 899.
8. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations. Springer Verlag, 1999.
9. Витяев Е.Е., Демин А.В., Пономарёв Д.К. Вероятностное обобщение формальных понятий // Программирование, Т.38, №5, 2012, с.219-230
10. Alexander Demin, Denis Ponomarev, Evgenii Vityaev. Probabilistic Concepts in Formal Contexts // Preliminary Proceedings of the Ershov Informatics Conference PSI Series, 8-th Edition (June 27 – July 1, 2011, Novosibirsk), Novosibirsk, 2011, pp 29-38
11. Scientific Discovery: <http://www.math.nsc.ru/LBRT/logic/vityaev>
12. Vityaev E.E., Lapardin K.A., Khomicheva I.V., Proskura A.L. Transcription factor binding site recognition by regularity matrices based on the natural classification method. *Intelligent Data Analysis*. v.12(5), IOS Press, 2008, 495-512.

Статья поступила 17 января 2012 г.

После доработки 11 сентября 2012 г.